Poznámky - diskrétní matematika

Petr Chmel

Relace a funkce

Definice 1 (Relace)**.** Nechť X, Y jsou množiny: relací mezi X a Y myslíme libovolnou množinu $R \subseteq X \times Y$. Pokud $(x, y) \in R$, píšeme xRy. $X = Y \Rightarrow$ relace na X.

Definice 2 (Vlastnosti relace)**.** Nechť R je relace na X. Pak R je:
∘ **reflexivní** $\Leftrightarrow \forall x \in X : xRx$
∘ **symetrická** $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : xRy \Leftarrow yRx$
∘ **tranzitivní** $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Leftarrow yRz$
∘ **anti-symetrická** $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Leftarrow x = y$

Definice 3 (Ekvivalence a (částečné) uspořádání)**.** Nechť R je relace na X.
R je ekvivalence, pokud je reflexivní, tranzitivní a symetrická.
R je částečné uspořádání, pokud je reflexivní, tranzitivní a anti-symetrická.

Definice 4 (Třída ekvivalence)**.** Nechť R je ekvivalence na X, $x \in X$. Potom třída ekvivalence je $R[x] := \{y \in X : xRy\}$.

Tvrzení 1 (Rozklad na třídy ekvivalence)**.** Nechť R je ekvivalence na X. Potom:

1. $\forall x \in X : R[x] \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in X : (R[x] = R[y] \Leftrightarrow xRy) \vee (R[x] \cap R[y] = \emptyset \Leftrightarrow (x, y) \notin R)$
3. třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.
1. Zjevně z definice xRx, tedy $x \in R[x]$.
2. Rozdělíme na dva případy: nejprve xRy. Pak uvážíme $z \in R[x] \Rightarrow xRz \wedge xRy \overset{\text{symetrie}}{\Leftrightarrow} yRx \wedge xRz \overset{\text{tranzitivita}}{\Rightarrow} yRz \Rightarrow z \in R[y]$, tedy $R[y] \subseteq R[x]$. Analogicky s prohozenými $x, y : R[x] \subseteq R[y]$, tedy $R[x] = R[x]$.
   Nyní druhý případ: mějme pro spor $\exists\, z \in X : z \in R[x] \cap R[y] \wedge (x, y) \notin R$. Tedy $xRz, zRy \Rightarrow xRy \Rightarrow \lightning$
3. Podle 2: dva prvky jsou v relaci právě tehdy, když paří do stejné třídy.

$\square$

Definice 5 (Částečně uspořádaná množina, její vlastnosti a prvky)**.** Nechť P je množina a R je relace na P. Pak (P, R) je částečně uspořádaná množina, pokud R je částečné uspořádání.
$x, y \in P$ jsou porovnatelné $\Leftrightarrow x \succeq y \vee x \preceq y$.
Řetězec je $C \subseteq P$ taková, že její dva libovolné prvky jsou porovnatelné.
Antiřetězec je $C \subseteq P$ taková, že její dva libovolné prvky nejsou porovnatelné.
$a, b \in P$: b je bezprostřední následník a, pokud $a \preceq b \wedge \nexists c \in P : c \neq a, b \wedge a \preceq c \preceq b$
Prvek $m \in P$ je:
∘ **maximální** $\Leftrightarrow$ neexistuje $a \neq m : a \succeq m$
∘ **největší** $\Leftrightarrow m \succeq a \,\forall a \in P$
∘ **minimální** $\Leftrightarrow$ neexistuje $a \neq m : a \preceq m$
∘ **nejmenší** $\Leftrightarrow m \preceq a \,\forall a \in P$
Uspořádání je lineární, pokud jsou každé dva prvky porovnatelné.

Věta 1 (O dlouhém a širokém)**.** Mějme částečně uspořádanou množinu $(P, \succeq)$. Označme $\alpha(P)$ velikost největšího antiřetězce v P a $\omega(P)$ velikost největšího řetězce v P.
Jsou-li $\alpha(P), \omega(P)$ konečné, pak $|P| \leq \alpha(P) \cdot \omega(P)$

Důkaz indukcí podle $\omega(P)$. 1. IK: $\omega(P) = 1$ - tedy nemám 2 porovnatelné prvky, tedy P tvoří antiřetězec, tedy $|P| \leq |P| \cdot 1$: ✓
2. IK: Předpokládáme platnost pro $\omega(P) \leq \omega_0$ (IP). Budeme dokazovat platnost pro P s $\omega(P) = \omega_0 + 1$. Nechť M je množina maximálních prvků - pak M tvoří antiřetězec, tedy $|M| \leq \alpha(P)$.
Dále uvažme částečně uspořádanou množinu $(P', \preceq) : P' = P \setminus M$. Pak $\alpha(P') \leq \alpha(P)$. Dále z faktu, že každý řetězec v P' lze prodloužit o 1 prvkem z M plyne $\omega(P') \leq \omega(P) - 1$. Pak $|P| = |M| + |P'| \leq \alpha(P) + \alpha(P') \cdot \omega(P') \leq \alpha(P) + \alpha(P) \cdot (\omega(P) - 1) = \alpha(P) \cdot \omega(P)$ □

Definice 6 (Funkce, její vlastnosti, inverze, složení)**.** Nechť X, Y jsou množiny. Pak relace f mezi X a Y je funkce, pokud $\forall x \in X : \exists! y \in Y : xfy$.
Tato funkce je:
○ **prostá** $\Leftrightarrow \forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
○ **na** $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$
○ **bijekce**, pokud je prostá a na.
Pokud je f bijekce, pak existuje inverzní funkce: $f^{-1} : Y \to X : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$
Nechť $g : Y \to Z$ je funkce. Potom složením f a g rozumíme funkci $g \circ f : X \to Z : (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Kombinatorické počítání a množiny

Tvrzení 2 (O počtu funkcí)**.** Nechť M, N jsou konečné množiny, $|M| = m, |N| = n$. Potom počet funkcí $f : N \to M$ je roven m^n.

Důkaz. Každá funkce $f : N \to M$ je jednoznačně určena n-ticí $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \in M^n$. Dále zjevně $|M^n| = m^n$. □

Definice 7 (Množinové značení)**.** Nechť X je množina. Pak $\mathcal{P}(X) = 2^X$ je množina všech podmnožin X. Symetrická diference množin X, Y: $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

Tvrzení 3 (O počtu podmnožin)**.** Nechť $|N| = n$ je konečná množina. Pak N má přesně 2^n podmnožin - tedy $|\mathcal{P}(N)| = |2^N| = 2^n$.

Důkaz. Existuje bijekce mezi 2^N a množinou funkcí $f : N \to \{0, 1\}$, jichž je 2^n. pro $A \subseteq N : f_A : N \to \{0, 1\} : f_A(x) = 0$ pokud $x \notin A$, jinak $f_A(x) = 1$.
Toto zobrazení je zjevně prosté a na - máme tedy bijekci. □

Tvrzení 4 (O počtu sudých a lichých podmnožin)**.** Nechť $|N| = n$ je konečná množina. Potom N má přesně 2^{n-1} sudých podmnožin a 2^{n-1} lichých podmnožin.

Důkaz. Stačí ukázat, že máme stejně sudých a lichých podmnožin. Vytvoříme funkci $f : 2^N \to 2^N : f(A) = A \triangle a$, kde a je pevně zvolený prvek. To je bijekce, převádějící ze sudoprvkové na lichoprvkovou množinu. □

Tvrzení 5 (O počtu prostých zobrazení)**.** Nechť $|M| = m, |N| = n$ jsou konečné množiny. Potom počet prostých zobrazení $f : N \to M$ je roven $\prod_{i=0}^{n-1} (m - i)$

Definice 8 (Permutace)**.** Permutace na N je libovolná bijekce $f : N \to N$. Jejich počet je $|N|!$. Permutaci lze rozložit na cykly.

Definice 9 (Kombinační čísla)**.** Nechť $k, n \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n$. Potom $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ je kombinační číslo. Dále $\binom{N}{k}$ značíme množinu všech k-prvkových podmnožin N.

Tvrzení 6 (O počtu k-prvkových podmnožin)**.** $|\binom{N}{k}| = \binom{|N|}{k}$ pro N, k, pro něž dává tvrzení smysl.

Důkaz počtem dvěma způsoby. □

Věta 2 (Binomická věta)**.**

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

Věta 3 (Princip inkluze a exkluze)**.** Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i \subseteq [n] \wedge I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \cdot |\cap_{i \in I} A_i|$$

Důkaz. Uvážíme $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Na levé straně započítáme x právě jednou. Totéž chceme i na pravé straně.
Bez újmy na obecnosti řekněme, že $x \in A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ a nepatří do ostatních. Označme si $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \neq \emptyset$. Pak $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow I \subseteq J$. Tedy na pravé straně započítáme x $\sum_{I \subseteq J, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1}$-krát. Potřebujeme ověřit rovnost tohoto výrazu s 1.

$$\sum_{I \subseteq J, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} = \sum_{I \subseteq J, |I| \text{ liché}} 1 + \sum_{I \subseteq J, |I| \text{ sudé}, I \neq \emptyset} -1 \overset{\text{Tvrz. o lich. a sud. podmn.}}{=}$$

$$= \sum_{I \subseteq J, |I| \text{ sudé}} 1 + \sum_{I \subseteq J, |I| \text{ sudé}, I \neq \emptyset} -1 = 1$$

□

Definice 10 (Pevný bod permutace a šatnářčino číslo)**.** Pevný bod permutace π na X je $x \in X : \pi(x) = x$. Šatnářčino číslo je počet permutací bez pevného bodu na $[n]$.

Základy pravděpodobnosti

Definice 11 (Pravděpodobnostní prostor)**.** Pravděpodobnostní prostor je trojice (Ω, Σ, P), taková, že Ω je tzv. nosná množina (všech jevů), Σ je množina přípustných jevů (podmnožin Ω) a P je funkce $\Sigma \rightarrow [0, 1]$ a jsou splněny nějaké axiomy.
Diskrétní pravděpodobnostní prostor je trojice (Ω, Σ, P), taková, že Ω je konečná nebo spočetná, $\Sigma = 2^\Omega$ a P splňuje:

1. $P[A] = \sum_{a \in A} P[\{a\}] \forall A \in \Sigma$
2. $P[\Omega] = 1$

Pokud Ω je konečná, hovoříme o konečném pravděpodobnostním prostoru.

Definice 12 (Podmíněná pravděpodobnost)**.** Nechť (Ω, Σ, P) je diskrétní pravděpodobnostní prostor a $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy takové, že $P[B] \neq 0$. Potom podmíněnou pravděpodobností (A za podmínky B) definujeme jako $P[A|B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]}$

Věta 4 (Bayesova)**.** Nechť $A, B_1, \ldots, B_n$ jsou jevy na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, Σ, P) takové, že: B_i jsou po dvou disjunktní, $P[B_i] > 0, B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega, P[A] > 0$. Pak

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i] \cdot P[B_i]}{\sum_{j=1}^n P[A|B_j] \cdot P[B_j]}$$

Definice 13 (Nezávislé jevy)**.** Jevy A, B jsou nezávislé, pokud $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$.

Definice 14 (Součin pravděpodobnostních prostorů)**.** Nechť $(\Omega_1, 2^{\Omega_1}, P_1)$,$(\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2)$ jsou diskrétní pravděpodobnostní prostory. Potom jejich kartézský součin je pravděpodobnostní prostor$(\Omega, 2^\Omega, P)$, kde $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, pro $A \subseteq \Omega$ definujeme $P = \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A} P_1[\{\omega_1\} \cdot P_2[\{\omega_2\}]$

Definice 15 (Náhodná veličina, její střední hodnota)**.** Nechť $(\Omega, 2^\Omega, P)$ je diskrétní pravděpodobnostní prostor. Potom náhodná veličina je libovolná funkce $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
Střední hodnota této veličiny je definována jako $E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P[\omega] \cdot X(\omega)$

Tvrzení 7 (Linearita střední hodnoty)**.** Pro náhodné veličiny X, Y a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:
$\circ\, E[\alpha X] = \alpha E[X]$
$\circ\, E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Definice 16 (Indikátor, nezávislost náhodných veličin)**.** Nechť A je jev v diskrétním pravděpodobnostním prostoru. Potom indikátor A je náhodná veličina I_A definovaná: $I_A(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega \notin A$, jinak $I_A(\omega) = 1$.
Náhodné veličiny X, Y na diskrétním pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, 2^\Omega, P)$ jsou nezávislé, pokud $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou jevy $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\}, \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq \beta\}$ nezávislé.

Poznámka. Pokud X, Y jsou nezávislé, pak $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$. (bez důkazu)

Teorie grafů

Definice 17 (Graf, důležité grafy a pojmy)**.** Graf je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je libovolná množina (vrcholů) a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.
V můžeme též značit jako $V(G)$, analogicky E. Standardně uvažujeme konečné grafy, nekonečné explicitně zdůrazníme.
Důležité grafy:
$\circ K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$ - úplný graf na n vrcholech
$\circ I_n = ([n], \emptyset)$ - nezávislá množina na n vrcholech
$\circ C_n$ - kružnice (cyklus) na n vrcholech
$\circ P_n$ - cesta s n vrcholy
$\circ K_{m,n}$ - úplný bipartitní graf na $m + n$ vrcholech
Pro graf $G = (V, E)$ platí: $\circ$ Dva vrcholy $v_1, v_2 \in V$ jsou sousední (incidentní), pokud $\{v_1, v_2\} \in E$ je hrana.
$\circ$ Vrchol $v \in V$ a hrana $e \in E$ jsou sousední (incidentní), pokud $v \in e$.
$\circ$ Dvě hrany $e_1, e_2 \in E$ jsou sousední (incidentní), pokud $|e_1 \cap e_2| = 1$.
$\circ$ Graf $H = (V', E')$ je podgraf G, pokud $E' \subseteq E \wedge V' \subseteq V$. $\circ$ Graf $H = (V', E')$ je indukovaný podgraf, pokud je podgraf a $E' = \binom{V'}{2} \cap E$ $\circ$ Sled je posloupnost $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ vrcholů a hran taková, že $v_i \in V \forall (i \in [n] \vee i = 0), e_i \in E \forall i \in [n], e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \forall i \in [n]$. $\circ$ Sled je tah, pokud se v něm neopakují hrany. $\circ$ Sled je cesta, pokud se v něm neopakují ani hrany, ani vrcholy.

Definice 18 (Izomorfismus)**.** Nechť $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ jsou grafy. Potom funkce $f : V_1 \to V_2$ se nazývá izomorfismus G_1 a G_2, pokud splňuje:

1. f je bijekce
2. $\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$

Tvrzení 8 (Zavedení vlnky a její ekvivalence)**.** Nechť $\sim$ je relace na V grafu $G = (V, E)$ taková, že: $u, v \in V : u \sim v \Leftrightarrow$ existuje cesta z u do v. Potom relace $\sim$ na V je ekvivalence.

Důkaz. Zjevně reflexivita platí, taktéž symetrie.
U tranzitivity: mějme $u, v, w \in V$: Vytvoříme sled $u \to v \to w$. Uvážíme nejkratší sled - to musí být cesta - kdyby nešlo o cestu, šel by na cestu zkrátit. $\square$

Definice 19 (Komponenta souvislosti, souvislost)**.** Třídy ekvivalence relace $\sim$ se nazývají komponenty souvislosti. Graf je souvislý, pokud má právě jednu komponentu souvislosti.

Definice 20 (Matice sousednosti)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf, kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Potom matice sousednosti G je matice $n \times n$, jež se značí $A = A_G = (a_{i,j})_{i,j \in [n]}$. Definuje se jako $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow v_i, v_j \in E$,$a_{i,j} = 0$ jinak.

Věta 5 (O počtu sledů)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf, kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a A_G jeho matice sousednosti, $B = A_G^k$ její k-tá mocnina. Potom $b_{i,j}$ značí počet sledů z v_i fo v_j délky k, kde $B = (b_i, j)$.

Důkaz indukcí podle k. $\square$

Definice 21 (Stupeň vrcholu, skóre grafu)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf, $v \in V$ jeho vrchol.
Stupněm vrcholu v rozumíme počet hran, které z v vycházejí. Značíme $\deg v = \deg_G v$.
Pokud navíc $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, potom posloupnost $\deg v_1, \ldots, \deg v_n$ nazýváme skóre grafu G.
Dohoda: *dvě skóre grafu považujeme za stejná, pokud se liší pouze permutací.*

Lemma 1 (Princip sudosti)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf. Potom $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$.

Důkaz. Každá hrana vychází ze dvou vrcholů - započítáme ji dvakrát. □

Důsledek 1 (O počtu vrcholů s lichým stupněm)**.** Počet vrcholů lichého stupně je sudý. Tento důsledek neplatí pro nekonečné grafy.

Věta 6 (O skóre)**.** Mějme posloupnost $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ nezáporných celých čísel takových, že $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Uvážíme posloupnost $D' = (d'_1, \ldots, d'_{n-1})$ takovou, že $d'_i = d_i$, pokud $i < n - d_n$, $d'_i = d_i - 1$ jinak. Potom D je skóre grafu $\Leftrightarrow$ D' je skóre grafu.

Důkaz. „$\Leftarrow$": mějme G' graf se skóre D'. Pak jsme schopni vytvořit $G = (V, E)$ se skóre D tak, že $V = V_{G'} \cup \{v_n\}, E = E_{G'} \cup \{\{v_i, v_n\} : n - 1 \geq i \geq n - d_n\}$.
„$\Rightarrow$": Pomocné tvrzení: Nechť $\mathcal{G}$ značí množinu všech grafů se skórem D. Potom v $\mathcal{G}$ je nějaký graf $G = (V, E)$ takový, že $V = \{v_1, \ldots, v_n\}, \deg v_i = d_i$, a v_n sousedí s vrcholy $v_{n-d_n}, \ldots, v_{n-1}$.

Důkaz pomocného tvrzení. Uvážíme libovolný graf $G_1 \in \mathcal{G} : G_1 = (V_1, E_1)$ tak, že $\deg v_i = d_i$.

1. v_n je spojen s $v_{n-d_n}, \ldots, v_{n-1}$ - máme náš hledaný graf
2. $\exists i \in \{n - d_n, \ldots, n - 1\}$ takové, že $\{v_i, v_n\} \notin E_1$. Uvažme i maximální možné. Zjevně $\exists v_j : j < i, \{v_j, v_n\} \in E_1 \wedge \exists v_k : \{v_k, v_i\} \in E_1 \wedge \{v_k, v_j\} \notin E_1$ $(\deg v_i \geq \deg v_j)$. Pak prohodíme hrany - skóre se nezmění, ale vylepšíme původní graf.

□

Nyní využijeme hledaný graf z tvrzení - ubráním posledního vrcholu vše splňujeme. □

Definice 22 (Eulerovskost, uzavřený eulerovský tah)**.** Uzavřený eulerovský tah v $G = (V, E)$ je tah takový, že každou hranu obsahuje právě jednou, každý vrchol obsahuje alespoň jednou a zároveň začíná a končí v témže vrcholu.
Dále řekneme, že graf je eulerovský, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

Věta 7 (O eulerovských grafech)**.** Graf je eulerovský $\Leftrightarrow$ je souvislý a všechny vrcholy mají sudý stupeň.

Důkaz. „$\Rightarrow$" Musí být souvislý - všechny stupně sudé: z jednoho vrcholu vstupuji tolikrát, kolikrát z něj vystupuji. „$\Leftarrow$" G je souvislý a má všechny stupně sudé. Mějme T tah, který používá největší možný počet hran.
Chceme: T je uzavřený a eulerovský. □

Definice 23 (Hamiltonovská kružnice)**.** Hamiltonovská kružnice je kružnice v grafu, jež obsahuje všechny vrcholy.

Definice 24 (Orientovaný graf a další pojmy)**.** Orientovaný graf je dvojice $G = (V, E)$ taková, že V je množina vrcholů a $E \subseteq V \times V$ je množina orientovaných hran.
Orientovaný tah v orientovaném grafu $G = (V, E)$ je posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, \ldots e_n, v_n$, kde $e_i = (v_{i-1}, v_i) \forall i \in [n]$ a hrany se neopakují. Obdobně definujeme orientovaný sled, cestu, nebo kružnici.
Uzavřený eulerovský tah v orientovaném grafu $G = (V, E)$ je tah, který:
∘ začíná a končí ve stejném vrcholu (**uzavřenost**)
∘ prochází každou hranou právě jednou a obsahuje všechny vrcholy (**eulerovskost**)
Vstupní stupeň vrcholu v v orientovaném grafu $G = (V, E)$ je počet orientovaných hran, které do v vchází. Značíme $\deg^+ v$.
Výstupní stupeň vrcholu v v orientovaném grafu $G = (V, E)$ je počet orientovaných hran, které z v vychází.

Značíme $\deg^- v$.
Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf. Potom symetrizace G je $\overline{G} = (V, \overline{E})$, kde $\overline{E} := \{e \in \binom{V}{2} : e = \{x, y\}$pro $(x, y) \in E\}$.
G je slabě souvislý, pokud jeho symetrizace je souvislý graf.
G je silně souvislý, pokud $\forall x, y \in V\ \exists$ orientovaná cesta z x do y.
Silná souvislost implikuje slabou souvislost.

Věta 8 (o orientovaných eulerovských grafech)**.** Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf. Potom G obsahuje uzavřený eulerovský tah právě když $\forall v \in V : \deg^+ v = \deg^- v$ a G je slabě souvislý.

Důkaz. Cvičení □

Definice 25 (Strom, les, list)**.** Graf je strom, pokud je souvislý a neobsahuje cyklus.
Graf je les, pokud neobsahuje cyklus.
Vrchol stupně 1 v libovolném grafu se nazývá list.

Lemma 2 (O existenci listu)**.** Každá strom s alespoň dvěma vrcholy má alespoň dva listy.

Důkaz. NechŤ $T = (V, E)$ je strom. Uvažme nejdelší možnou cestu $(v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k)$ v rámci T. Uvědomíme si, že $v_0 \neq v_k$ jsou listy - kdyby nebyly, lze cestu prodloužit, nebo bychom měli cyklus, což by byl spor. □

Lemma 3 (O trhání listů)**.** Mějme graf $G = (V, E), v \in V$ list.
Uvažme graf $G - v := (V \setminus v, E \cap \binom{V \setminus v}{2})$.
Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. G je strom
2. $G - v$ je strom

Důkaz. „$1 \Rightarrow 2$“: G je souvislý a bez kružnic. Chceme: $G - v$ je souvislý a bez kružnic.
Zjevně odtržením listu souvislost neporušíme a kružnici také nevytvoříme. Souvislost: $\forall x, y \in V(G - v) \exists$ cesta z x do y v G, která se vyhýbá vrcholu v. Tato cesta také náleží $G - v$, tedy $G - v$ je souvislý.
„$2 \Rightarrow 1$“: $G - v$ je souvislý a bez kružnic. Chceme: G je souvislý a bez kružnic.
Přidáním listu kružnici zjevně nevytvoříme a spojitost zůstane zachována: označme vrchol n jako jediný vrchol, který je hranou spojen s v. Pak z každého vrcholu existuje v $G - v$ cesta do n. Prodloužením o jednu hranu vytvoříme cestu do v. □

Věta 9 (Ekvivalentní charakterizace stromů)**.** Nechť graf $G = (V, E)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. G je strom
2. $\forall x, y \in V : \exists!$ cesta z x do y (**jednoznačnost cesty**)
3. G je souvislý a vynecháním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf (**minimální souvislost**)
4. G neobsahuje kružnici a každý graf vzniklý z G přidáním hrany již kružnici obsahuje (**maximální graf bez kružnic**)
5. G je souvislý a $|V| = |E| + 1$

Důkaz. Dokážeme ekvivalenci 2-5 k 1 přes indukci podle počtu vrcholů. □

Definice 26 (Kostra grafu)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf. Libovolný strom tvaru (V, E'), kde $E' \subseteq E$ nazveme kostrou grafu.

Lemma 4 (O kostře a souvislosti)**.** Graf má kostru $\Leftrightarrow$ je souvislý.

Důkaz. "$\Leftarrow$"Kostru můžeme na graf doplnit bez ztráty souvislosti
"$\Rightarrow$"Ze souvislého grafu lze zjevně vytvořit kostru. □

Definice 27 (Rovinný graf, oblouk, nakreslení, stěna)**.** Oblouk roviny je obraz intervalu $[0,1]$ při spojitém prostém zobrazení, tedy množina tvaru $\gamma([0,1])$, kde $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ spojitá a prostá. Body $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ nazýváme koncovými body oblouku.
Dále $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je obloukově souvislé, pokud $\forall x, y \in X$ lze x a y spojit obloukem v X.
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Potom nakreslením G rozumíme přiřazení, které každému vrcholu $v \in V$ přiřazuje $b(v) \in \mathbb{R}^2$, každé hraně $e \in E$ přiřazuje oblouk $o(e) \subset \mathbb{R}^2$ za podmínek:

1. b je prosté
2. koncové body oblouku $o(\{u, v\})$ jsou body $b(u), b(v)$
3. žádný nekoncový bod oblouku $o(e)$ nesplývá s žádným z bodů $b(v)$

Dále je nakreslení rovinné, pokud libovolné dva oblouky přiřazené hranám sdílejí nejvýše koncové body.
Graf je rovinný, pokud má nějaké rovinné nakreslení.
Stěny v rovinném nakreslení jsou maximální obloukově souvislé podmnožiny $\mathbb{R}^2 \setminus (\bigcup_{v \in V}\{b(v)\} \cup \bigcup_{e \in E}\{o(e)\})$.

Věta 10 (Eulerův vzorec pro rovinné grafy)**.** Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf, kde s je počet stěn v libovolném rovinném nakreslení grafu G. Potom $|V| - |E| + s = 2$
Odtud plyne, že počet stěn nezávisí na volbě nakreslení.

Důkaz indukcí podle $|V| + |E|$. Báze triviální (jeden vrchol).
Budeme dokazovat pro $|V| > 1$. IP: platnost pro nižší hodnoty.
Mějme $G = (V, E)$. Pak G má list - ten utrhneme a použijeme IP, nebo nemá list, pak má kružnici - odebereme libovolnou hranu a použijeme IP.
Poznámka: je k tomu potřeba obtížná věta z topologie (Jordanova věta o kružnici). □

Tvrzení 9 (O doplnění na triangulaci)**.** Kdykoliv G je rovinný graf s alespoň třemi vrcholy a zadaným rovinným nakreslením, potom lze G rozšířit pouze přidáváním hran na tzv. triangulaci, tj. rovinné nakreslení, kde každá stěna je ohraničena trojúhelníkem.

Důkaz. Uvažme rovinné nakreslení grafu G' tak, že G' získáme pouze přidáváním hran do G a zároveň tak, že G' má maximální počet hran. Dokážeme, že G' je triangulace.

1. G' je souvislý - kdyby nebyl, tak můžeme propojit komponenty - spor s maximalitou počtu hran.
2. Podél žádné stěny se neopakují vrcholy. Kdyby se opakovaly, pak mějme vrcholy u, v, w takové, že v se ve stěně opakuje, u předchází v a w následuje za v. Pak můžeme propojit u a w - spor.
3. Každou stěnu ohraničuje trojúhelník. Pro spor: je to n-úhelník pro $n \geq 4$. Protože se neopakují vrcholy, pak stěna vypadá jako normální n-úhelník. Pak si vybereme 4 vrcholy a střídavě je obarvíme 2 barvami - mimo n-úhelník může být nejvýše jedna ze dvou stejnobarevných hran - druhou můžeme nakreslit dovnitř n-úhelníka - opět spor s maximalitou počtu hran.

□

Důsledek 2 (O počtu hran rovinného grafu)**.** Nechť G je rovinný graf s n vrcholy a m hranami, kde $n \geq 3$. Potom $m \leq 3n - 6$.

Důkaz. Uvažme libovolný rovinný graf G. Ten rozšíříme na triangulaci G'. Potom uvážíme, že $s = \frac{2|V(G')|}{3}$.
Nyní z Eulerovy formule: $n - m' + s = 2 \Rightarrow n - \frac{1}{3}m' = 2 \Rightarrow m' = 3n - 6 \Rightarrow m \leq 3n - 6$. □

Důsledek 3 (O vrcholu stupně nejvýše pět)**.** V každém rovinném grafu existuje vrchol, jehož stupeň je nejvýše 5.

Důkaz. Z předchozího důsledku: $6n - 12 \geq 2m = \sum \deg v$. Pak $6 - \frac{12}{n} \geq \frac{\sum \deg v}{n}$, což je aritmetický průměr - tedy je nutně menší než 6, tedy existuje vrchol se stupněm nejvýše 5. □

Definice 28 (Stupeň stěny)**.** Stupeň stěny (značeno $\deg f$, kde f je stěna) je počet hran podél stěny.

Tvrzení 10 (O počtu hran rovinného grafu bez trojúhelníků)**.** Pokud G je rovinný graf bez trojúhelníků a má alespoň tři vrcholy, pak $|E| \leq 2|V| - 4$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti: G je souvislý. Pokud není, pak spojíme komponenty a ničemu to neuškodí. $2|E| = \sum \deg f \geq 4s$, kde s je počet stěn (z faktu, že stupeň stěny je nejméně 4). Nyní z Eulerovy formule: $2 = |V| - |E| + s \leq |V| - |E| + \frac{|E|}{2} \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$ □

Definice 29 (Duální graf)**.** !"Definice"
Mějme rovinné nakreslení G pak stěny rovinného nakreslení jsou vrcholy, hrany odpovídají hranám.

Definice 30 (Obarvení a chromatické číslo)**.** Mějme graf $G = (V, E)$.
Potom obarvení G pomocí k barev je libovolná funkce $c : V \to [k]$ taková, že $\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$.
Chromatické číslo G je minimální k takové, že G má obarvení pomocí k barev. Značíme jej $\chi(G)$.

Věta 11 (O čtyřech barvách)**.** Chromatické číslo libovolného rovinného grafu je nejvýše čtyři.

Bez důkazu - extrémně těžký. □

Definice 31 (k-degenerovanost)**.** Řekneme, že graf je k-degenerovaný, pokud každý jeho podgraf obsahuje vrchol stupně nejvýše k.
Stromy jsou 1-degenerované, rovinné grafy jsou 5-degenerované.

Tvrzení 11 (Barevnost k-degenerovaného grafu)**.** Je.li G k-degenerovaný graf, potom $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz indukcí podle počtu vrcholů $n = |V(G)|$, k je parametr. 1. IK: $n = 0$ ✓- nemusíme ani barvit
2. IK: $n > 0$, předpokládáme platnost pro hodnoty menší než n. Nechť v je vrchol stupně nejvýše k. Uvažme $G' = G - v$ - ten je opět k-degenerovaný - tedy $\chi(G') \leq k + 1$. Sousedi v v G mohou být obarveni nejvýše k barvami, obarvíme jej tedy $k + 1$. barvou. Máme validní obarvení G nejvýše $k + 1$ barvami. □

Důsledek 4 (Věta o šesti barvách)**.** $\chi(G) \leq 6$ pro G rovinný.

Věta 12 (O pěti barvách)**.** Pro každý G rovinný platí, že $\chi(G) \leq 5$.

Důkaz indukcí podle $n = |V(G)|$. 1. IK: $n = 0$ - stejně jako v předchozím důkazu.
2. IK: $n > 0$, předpokládáme platnost pro hodnoty menší než n. Najdeme $v \in V(G) : \deg v \leq 5, G' = G - v$. Pak rozlišíme dvě možnosti.

1. $\deg v \leq 4$ - pak jsou nejvýše 4 barvy na sousedech při obarvení G' a v můžeme obarvit pátou barvou.

2. $\deg v = 5$ - pokud sousedi v používají pouze 4 barvy, pak stejně jako v 1. Jinak používají pět barev. Označme $G'_{i,j}$ indukovaný podgraf G' na vrcholech barev i, j. Pak mějme sousedy v: $a, b, c, d, e : c(a) = 1, c(b) = 2, c(c) = 3, c(d) = 4, c(e) = 5$ a jsou nakresleny ve směru hodinových ručiček. Pak označme $G'_{1,3}(a)$ komponentu $G'_{1,3}$ obsahující a. Pokud $c \notin G'_{1,3}(a)$, pak v podgrafu $G'_{1,3}(a)$ otočíme barvy 1 a 3 - pak můžeme v obarvit 1. Pokud ovšem $c \in G'_{1,3}(a)$, můžeme předchozí situaci použít na b a $G'_{2,4}$, protože b, d jsou odděleny kružnicí spojující a, c a obsahující v.

□

Další věci ke zkoušce

Věta 13 (Erdös-Szekersova)**.** Libovolná posloupnost reálných čísel délky $n^2 + 1$ obsahuje monotónní podposloupnost délky $n + 1$.

Důkaz. Nechť máme posloupnost $(x_1, \ldots, x_{n^2+1})$. Položme $X = \{1, 2, \ldots, n^2 + 1\}$ a definujme relaci $\preceq$ na X předpisem: $i \preceq j \Leftrightarrow i \leq j \wedge x_i \leq x_j$.
Po ověření, že $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Nyní za použití věty o dlouhém a širokém $\alpha(X, \preceq) \cdot \omega(X, \preceq) \geq n^2 + 1$, tedy $\alpha(X, \preceq) > n \vee \omega(X, \preceq) > n$. Nyní je jen potřeba ukázat, že řetězec je neklesající posloupnost a nezávislá množina je nerostoucí posloupnost. □

Definice 32 (Náhodný graf)**.** Vybíráme-li náhodný graf na $V = [n]$, přičemž všechny grafy jsou stejně pravděpodobné, můžeme na to nahlížet jako na $\binom{n}{2}$ hodů spravedlivou mincí - pro každou dvojici vrcholů hodíme mincí, zda se má stát hranou nebo ne. Příslušný pravděpodobnostní prostor $\mathcal{G}_n$ bude mít jako prvky všechny možné grafy na V, a všechny budou mít stejnou pravděpodobnost $2^{-\binom{n}{2}}$

Věta 14 (o existenci velkých bipartitních podgrafů)**.** Buď G graf se sudým počtem $(2n)$ vrcholů a s $m > 0$ hranami. Potom množinu $V = V(G)$ lze rozdělit na dvě disjunktní n-prvkové podmnožiny A, B tak, že více než $\frac{m}{2}$ hran G spojuje vrchol z A s vrcholem z B.

Důkaz. Zvolme náhodně n-prvkovou množinu A a položme $B = V \setminus A$. Nechť X označuje počet hran G takových, že $\{a, b\} \in E(G) \wedge a \in A, b \in B$. Spočteme střední hodnotu $E[X]$ náhodné veličiny X. Pro každou hranu $e = u, v \in E(G)$ definujeme jen N_e, který nastane pro všechny volby množiny A takové, že $|A \cap e| = 1$. Platí $X = \sum_{e \in E(G)} I_{N_e}$, a tedy $E[X] = \sum_{e \in E(G)} P(N_e)$. Nyní stačí stanovit pravděpodobnost $P(N_e)$.
Celkem existuje $\binom{2n}{n}$ možností volby množiny A. Požadujeme-li, aby $u \in A \wedge v \notin A$, můžeme zbývajících $n-1$ prvků A zvolit $\binom{2n-2}{n-1}$ způsoby, a stejně tak pro symetrickou situaci $u \notin A \wedge v \in A$. Proto

$$P(N_e) = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2}$$

Odtud dostaneme $E[X] = \sum_{e \in E(G)} P(N_e) > \frac{m}{2}$. Střední hodnota je průměrem hodnot X přes všechny volby množiny A. Průměr nemůže být větší než maximum z těchto hodnot, a tedy existuje volba A, pro niž více než polovina hran jde napříč. $\square$

Seznam témat