Poznámky - kombinatorika a grafy II

Petr Chmel, ZS 2018/19

Definice 1 ((Největší) párování)**.** Párování M v grafu $G = (V, E)$ je $M \subseteq E$ taková, že každý vrchol $v \in V$ je obsažen v nejvýše jedné hraně $e \in M$.
Dále M je největší, pokud má největší počet hran ze všech párování v G.

Definice 2 (Střídavá cesta)**.** Střídavá cesta v grafu G a párování M je cesta, na níž se střídají párovací a nepárovací hrany.

Definice 3 (Volný vrchol)**.** Řekneme, že vrchol v grafu G s párováním M je volný, jestliže není obsažen v žádné párovací hraně (tj. hraně M).

Definice 4 (Volná střídavá cesta)**.** Volná střídavá cesta je střídavá cesta, která začíná i končí ve volném vrcholu.

Lemma 1 (Volná střídavá cesta a párování)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf, M je párování v G. Potom G obsahuje volnou střídavou cestu $\Leftrightarrow$ M není největší párování.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Mám volnou střídavou cestu. Na ní provedu alternaci, tj. její hrany, které byly v párování, z párování vyjmu a naopak. Alternace je opět párování, navíc o 1 větší.
„$\Leftarrow$“: Nechť M' je párování a $|M'| > |M|$.
Uvažme $M' \cup M$. Graf $H = (V, M' \cup M)$ má pouze vrcholy stupně 0,1 nebo 2. Z toho plyne, že komponenty souvislosti H mohou být sudé cykly (liché nemůžou být, protože pak by dvě hrany jednoho párování sdílely vrchol), samotné vrcholy, hrany v obou párováních („dvojhrana“) nebo cesty. Zároveň jediná typ komponenty, pro niž platí, že počet hran z M a M' nemusí být stejný, jsou cesty. Tedy musí existovat (abychom splnili $|M'| > |M|$) cesta, která začíná i končí hranou z M'. Tato cesta je navíc pro M volná střídavá, což nám stačí. ⊞

Definice 5 (Kytka)**.** Kytka v grafu G s párováním M je střídavá cesta sudé délky, která z jedné strany začíná volným vrcholem a z druhé strany končí lichým střídavým cyklem takovým, že jediná dvojice stejných nepárovacích hran vychází z jediného vrcholu stupně tři (tj. z vrcholu spojujícího cestu a cyklus).

Lemma 2 (O kontrakci kytky)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf, M je párování, K je květ kytky.
Potom G má volnou střídavou cestu $\Leftrightarrow$ $G.K$ má volnou střídavou cestu.
Navíc, volnou střídavou cestu v $G.K$ lze převést na volnou střídavou cestu v G v lineárním čase.

Důkaz. „$\Leftarrow$“: Máme $G.K, M.K, P$ na $G.K$, chci P' na G.
Mám cestu - pokud P neobsahuje $v.k$ jako vnitřní vrchol, pak $P' = P$ ($v.k$ jako krajní vrchol je jednoduchý případ).
Nechť tedy $v.k$ je vnitřní vrchol P. Pak z jedné strany do $v.k$ vchází párovací a vychází nepárovací hrana. Díky vlastnostem květu jej lze jedním směrem květ obejít (přicházím nepárovací hranou, tedy musím dále pokračovat po párovací, a dále už je směr dán jednoznačně). Zároveň toto zjevně zvládneme v lineárním čase.
„$\Rightarrow$“: Chci převést volnou střídavou cestu P' v G na volnou střídavou cestu P v $G.K$.
Pokud P' neobsahuje vrcholy květu, mám $P = P'$. Jinak si rozdělím $P' = LMR$, kde L je počáteční úsek až do prvního květového vrcholu, R je koncový úsek od posledního květového vrcholu. Jestliže L neobsahuje stonek, můžu jako P vzít L+stonek, s R můžeme provést totéž analogicky.
Jinak předpokládejme, že L i R obsahují stonek. Pak nechť bez újmy na obecnosti L obsahuje $v \in (L \cup R) \cap S$ nejbližší ke květu (kde S je stonek). Pak jako volnou střídavou cestu zvolím L (až do v) + cesta po stonku do květu a do vhodného květového vrcholu $+R$. ⊞

Definice 6 (Edmondsův les a jeho stavba)**.** Edmondsův les je podgraf G, který vznikne prohledáváním grafu G s párováním M tak, že z volných vrcholů pustíme BFS, které střídavě prochází nepárovací a párovací hrany.

Algoritmus 1 (Edmondsův kytičkový)**.** Vstup: graf G, párování M.
Výstup: buď informace M je největší, nebo větší párování M'.

1. Použitím BFS z volných vrcholů postav Edmondsův les.

2. Pokud mám příčnou hranu mezi různými stromy na sudých úrovních, mám volnou střídavou cestu, tedy ji můžu zalternovat a vrátit upravený graf.

3. Pokud mám hranu na sudé úrovni v rámci jednoho stromu, našel jsem kytku, takže volám Edmonds($G.K, M.K$). Pokud nemám v. s. c., koním, M je největší. Jinak z lemmatu najdu v. s. c. v G a zalternuji.

4. Jinak M je největší.

Tvrzení 1 (O Edmondsově kytičkovém algoritmu)**.** Edmondsův kytičkový algoritmus spuštěný na graf G a párování M doběhne v čase $\mathcal{O}(n(n+m))$ a najde párování M' o jednu hranu větší, pokud existuje.

Definice 7 (Perfektní párování)**.** M je perfektní párování, pokud M je párování a G, M neobsahuje volný vrchol.

Věta 1 (Tutteova podmínka)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf, $\mathrm{odd}(G) := \#$ lichých komponent.
Pak G má perfektní párování $\Leftrightarrow \forall S \subseteq V(G) : \mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Nechť G nesplňuje Tutteovu podmínku. Pak $\exists S \subseteq V : \mathrm{odd}(G - S) > |S|$. Pro existenci perfektního párování by musela $\forall s \in S$ vycházet hrana do komponenty liché velikosti, ale komponent je více než vrcholů, tedy G nemá perfektní párování.
„$\Leftarrow$“: Nechť G splňuje Tutteovu podmínku. Pak $|V|$ je sudá.
Provedeme důkaz indukcí podle počtu nehran G:
Báze: G je úplný - perfektní párování nalezneme ze sudosti počtu vrcholů jednoduše.
IK: G má alespoň jednu nehranu. Z IP: $\forall G'$ vytvořený z G přidáním alespoň jedné hrany má perfektní párování $\Leftrightarrow G'$ splňuje Tutteovu podmínku.
Trik: definujeme $S = \{v \in V : v \text{ je spojen se všemi zbylými vrcholy}\}$.
Lehký případ: $G - S$ má všechny komponenty úplné. Pak mám $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$. Pokud má libovolná komponenta sudou velikost, umíme ji spárovat, pokud nemá, spárujeme ji s libovolným vrcholem ze S. Zbylé vrcholy po spárování všech lichých komponent spárujeme libovolně mezi sebou (je jich sudě).
Těžký případ: $G - S$ obsahuje alespoň jednu komponentu K, která není úplná. Pak K obsahuje vrcholy u, v nespojené hranou, které v okolí mají $w \in K$. Také existuje $x \in V : \{w, x\} \notin E$ (kdyby neexistovala, pak by muselo platit $w \in S$).
Označíme $e_1 = \{u, v\}, e_2 = \{w, x\}$. Vezmeme $G_1 := G + e_1, G_2 := G + e_2$ .Ty mají z indukčního předpokladu a splňění Tutteovy podmínky perfektní párování - spojení: hrana může spojit dvě sudé komponenty, dvě liché komponenty, lichou a sudou komponentu. Ani jedno z toho Tutteovu podmínku nepokazí.
Nyní máme G_1 s M_1, G_2 s M_2. Nyní, pokud $e_1 \notin M_1$, pak můžeme za perfektní párování G vzít M_1. Analogicky, pokud $e_2 \notin M_2$, pak můžeme za perfektní párování G vzít M_2. Jinak $e_1 \in M_1, e_2 \in M_2$. Pak vezmu párování $M_1 \cup M_2$, které má jako komponenty párovací hrany, nebo sudé kružnice. Cesta komponentou být nemůže, protože M_1, M_2 jsou perfektní.
Pokud e_1, e_2 jsou v různých komponentách (nutně kružnicích), složím párování z M_1 pro komponentu obsahující e_2 a z M_2 jinde.
Pokud jsou ve stejné komponentě, postavím podle obrázku (TODO). ⊞

Věta 2 (Petersenova)**.** Každý 3-regulární vrcholově 2-souvislý graf $G = (V, E)$ má perfektní párování.

Důkaz. Ověříme Tutteovu podmínku.
Mějme $S \subseteq V$ libovolně. Chci: $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$.

1. Každá lichá komponenta v $G - S$ je spojena s S alespoň dvěma hranami - ze 2-souvislosti

2. Každá lichá komponenta v $G - S$ je spojena s S lichým počtem hran - ze 3-regularity

3. Z 1,2: z každé komponenty vedou alespoň 3 hrany, a tedy vrcholů S musí být ze 3-regularity aspoň tolik, co komponent.

⊞

Grafové minory

Lemma 3 (O kontrahované hraně)**.** Nechť G je vrcholově 3-souvislý graf neizomorfní s K_4. Potom g obsahuje hranu e, jejíž kontrakce neporuší 3-souvislost.

Důkaz. Dokážeme sporem: Nechť $G = (V, E)$ je 3-souvislý s alespoň pěti vrcholy a pro každou hranu e platí, že $G.e$ není 3-souvislý (tuto „kritičnost“ označíme $(*)$).
Dokážeme nejprve, že pokud G splňuje $(*)$, pak pro každou hranu $e = \{x, y\}$ existuje vrchol v_e takový, že $\{x, y, v_e\}$ je vrcholový řez a navíc z každého vrcholu takového řezu vede hrana do každé komponenty $G - x - y - v_e$.
Protože $G.e$ není 3-souvislý, má řez o právě dvou vrcholech. Jeden vrchol je $v.e$, a druhý je v_e, tedy $\{x, y, v_e\}$ je řez $G0$. Minimalita řezu nám zaručuje hrany do každé komponenty z každého vrcholu.
Nyní zvolme $e = \{x, y\}$ libovolně. K e najdeme z tvrzení v_e tak, abychom minimalizovali velikost nejmenší komponenty C v $G - x - y - v_e$.
Nechť $u \in C$ je soused v_e, a hrana $f = \{u, v_e\}$. Pak najdeme D komponentu $G - u - v - v_F$ takovou, že neobsahuje ani x ani y (x, y jsou v téže komponentě). Pak D obsahuje $u' \in C$ spojený s u. Ale pak $D \subset C \Rightarrow |D| < |C|$ - mám spor s minimalitou C. ⊞

Tvrzení 2 (Tutteova charakterizace 3-souvislých grafů)**.** Graf G je 3-souvislý $\Leftrightarrow$ existuje posloupnost $G_1, G_2, \ldots, G_n$ taková, že $G_1 = K_4, G_n = G \wedge \forall i \in [n-1] : G_i$ vznikne z G_{i+1} kontrakcí hrany a navíc G_{i+1} má všechny stupně alespoň 3.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Plyne z lemmatu o kontrahované hraně a toho, že 3-souvislost nám zajišťuje stupně ≥ 3 po kontrakci.
„$\Leftarrow$“: Máme posloupnost $G_1, \ldots, G_n$ ze znění.
Pro spor: nechť $\exists i \in [n] \setminus \{1\}$ takové, že G_{i+1} není 3-souvislý a i je nejmenší takový index. Z toho plyne, že G_i má řez velikosti 2. Pokud $\{x, y\}$ tvoří řez, tak každá komponenty $G_i - x - y$ má velikost alespoň 2 (ze stupňů vrcholů). Tedy po kontrakci libovolné hrany bude $\{x, y\}$ stále řezem, tedy G_{i-1} má řez velikosti 2, tedy i není minimální, což je náš hledaný spor. ⊞

Definice 8 (Minor grafu)**.** Nechť G, H jsou grafy. Pak řekneme, že H je minor G, značeno $H \preceq G$, pokud lze H získat z G postupnou aplikací operací odebírání hran, odebírání vrcholů, kontrakcí hran.

Pozorování (Minor a podgraf)**.** Každý podgraf je minor.

Pozorování (Tranzitivita minority)**.** Operace „$\preceq$“ je tranzitivní.

Definice 9 (Rovinný graf)**.** Graf G je rovinný, pokud má nakreslení g a každá stěna v g je uzavřená.

Fakt 1 (Rovinnost a minory)**.** Pokud je G rovinný, pak i všechny jeho minory jsou rovinné.

Věta 3 (Kuratowského-Wagnerova)**.** Pro graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. G je rovinný
2. G neobsahuje dělení K_5, $K_{3,3}$
3. G neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: $K_5, K_{3,3}$ nejsou rovinné
$1 \Rightarrow 3$: z faktu
$3 \Rightarrow 2$: dělení H obsahuje H jako minor.
$3 \Rightarrow 1$: indukcí podle počtu vrcholů.
Báze: grafy s nejvýše 4 vrcholy, které lze rovinně nakreslit triviálně (vezmu úplný graf a odstraním hrany navíc).
Nechť $|V| \geq 5, G$ neobsahuje $K_5, K_{3,3}$ jako minor. Zadefinujeme stupeň souvislosti grafu jako k_v a rozdělíme na případy.
Pokud $k_v = 0$, rozdělíme na komponenty, které umíme z IP nakreslit a nakreslíme.
Pokud $k_v = 1$, máme artikulaci, takže rozdělím na komponenty, ty nakreslím z IP a pak zdeformujeme nebo

provedeme projekci na projektivní rovinu.
Pokud $k_v = 2$, má G řez $\{x, y\}$ velikosti 2. Vezmu komponenty zvlášť a mezi x a y vložím hranu do každé komponenty a z IP nakreslím. Zároveň tím nevytvořím minor K_5 nebo $K_{3,3}$, protože přidaná hrana je vlastně jen zkrácení cesty z x do y přes jinou komponentu.
Opět dám na kouli a promítnu, protože x a y sdílí stěnu. Pak zdeformuji dle libosti.
Poslední případ: $k_v = 3$: G je 3-souvislý. Z lemmatu o kontrahované hraně najdeme $e : G.e = G'$. Z indukčního předpokladu: G' je rovinný (bez zakázaných minorů). Uvážíme $G'' = G' - v_e = G - x - y$. Označme F_e stěnu odpovídající vrcholu v_e.
G'' je rovinný, 2-souvislý s nakreslením g'' a stěnou F_e. Označíme C vrcholy hranice stěny F_e a zpozorujeme, že C je kružnice z ušatého lemmatu, navíc $N(x) \setminus y \subseteq C, N(y) \setminus x \subseteq C$.
Opět rozdělíme na případy: $|N(x) \cap N(y)| \geq 3$. Pak máme dělení, a tedy i minor, K_5.
Mějme $a_1 \neq a_2 \in N(x), b_1 \neq b_2 \in N(y)$ na C v pořadí a_1, b_1, a_2, b_2. Pak máme dělení $K_{3,3}$.
Jinak nenastává ani jeden z předchozích případů. Pak $N(x) = \{a_1, \ldots, a_n\}, N(y) = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Pak $a_1, \ldots, a_n$ dělí C na vrcholově vnitřně disjunktní cesty P_i. Z předchozího $N(y) \subseteq P_i$ pro nějaké $i \in [n]$, což lze vše dokreslit jednoduše. ⊞

Kreslení grafů na plochy

Definice 10 (Homeomorfismus)**.** Bijekce $f : X \to Y$ je homeomorfismus, pokud f i f^{-1} jsou spojité.

Fakt 2 (Homeomorfismy a rovinná nakreslení)**.** Homeomorfismy zachovávají rovinná nakreslení.

Definice 11 (Plocha)**.** Plocha je kompaktní souvislá dvojrozměrná varieta bez hranice.

Definice 12 (Dvojrozměrná varieta bez hranice)**.** Dvojrozměrná varieta bez hranice je cosi, pro což platí, že každý vrchol má okolí, které je homeomorfní okolí bodu v $\mathbb{R}^2$.

Poznámka (Operace s plochami)**.** Můžeme přidat ucho, nebo křižítko.

Poznámka (Značení ploch)**.** Pro $g \in \mathbb{N}_0$ nechť Σ_g je plocha vzniklá ze sféry přidáním g uch. Nazýváme ji orientovatelnou plochou.
Pro $g \in \mathbb{N}$ nechť Π_g je plocha vzniklá ze sféry přidáním g křižítek. Nazýváme ji neorientovatelnou plochou.

Fakt 3 (Dělení ploch)**.** Každá plocha je homeomorfní jedné z Σ_i, Π_i.

Fakt 4 (O vzniku ploch)**.** Přidáním $k \geq 0$ uší a $l \geq 1$ křižítek vznikne plocha Π_{2k+l}

Definice 13 (Nakreslení grafu)**.** Nakrelení grafu $> G = (V, E)$ na plochu Γ je zobrazení φ takové, že každému vrcholu $v \in V$ přiřadí bod $\varphi(v) \in \Gamma$, každé hraně $e \in E$ přiřadí křivku $\varphi(e) \subseteq \Gamma$ splňující

1. $\forall x, y \in V : x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$
2. $\forall e, f \in R : e \neq f \Rightarrow \varphi(e) \cap \varphi(f) = \{\varphi(x) : x \in e \cap f\}$
3. $\forall e \in E, \forall v \in V : v \in E \Leftrightarrow \varphi(v) \in \varphi(e)$.

Definice 14 (Stěna nakreslení)**.** Stěna nakreslení φ na ploše Γ je topologicky souvislá komponenta $\Gamma \setminus (\{\varphi(e) : e \in E\} \cup \{\varphi(v) : v \in V\})$.

Definice 15 (Buňkové nakreslení)**.** Nakreslení je buňkové, pokud každá stěna je homeomorfní otevřenému kruhu.

Fakt 5. Nakreslení G na sféru je buňkové $\Leftrightarrow$ G je souvislý

Definice 16 (Eulerova charakteristika plochy)**.** Eulerova charakteristika plochy Γ je $\chi(\Gamma) = 2 - g$ pro $\Gamma \cong \Pi_g$ nebo $\chi(\Gamma) = 2 - 2g$ pro $\Gamma \cong \Sigma_g$

Věta 4 (Zobecněná Eulerova formule)**.** Nechť máme nakreslení $G = (V, E)$ na plochu Γ, které má s stěn. Pak $|V| - |E| + s \geq \chi(\Gamma)$. Navíc platí rovnost, pokud je nakreslení buňkové.

Důkaz. Pro plochy Σ_g podobně jako Eulerův vzorec.
Ukážeme rovnost pro plochy $\Pi_g, g \geq 1$: indukcí podle g.
Báze: 0 křižítek - platí Eulerova formule pro rovinné grafy (Σ_g).
Jinak mějme $\Gamma \cong \Pi_g : g \geq 1$. Označme si $v(g) = |V(G)|, e(G) = |E(G)|, s(G) = \#$ stěn, $L(G) = v(G) - e(G) + s(G)$.
Nechť existuje křižítko K, do něhož vede $n \geq 1$ hran (pokud $n = 0$, nakreslení není buňkové).
Vytvoříme G' z G podrozdělením každé z n hran na 2 vrcholy (před a za křižítko).
Pak $v(G') = v(G) + 2n, e(G') = e(G) + 2n, s(G') = s(G)$, tedy $L(G')$ se nemění.
Vytvoříme G'' z G' spojením „sousedních" vrcholů vzniklých v G' do stěny kolem křižítka. Pozor: pokud máme jednu hranu, musíme ještě podrozdělit, aby nevznikl multigraf.
Pak $v(G'') = v(G'), e(G'') = e(G') + 2n, s(G'') = s(G') + 2n$, tedy $L(G'')$ se stále nemění.
Nakonec vytvoříme G''' z G'' umazáním všeho uvnitř nové (v G'') stěny. Pak $v(G''') = v(G''), e(G''') = e(G'') - n, s(G''') = s(G'') - n + 1$, tedy $L(G''') = L(G) + 1$ a z IP pro plochu s $g - 1$ křižítky vše funguje. ⊞

Důsledek 1 (O omezení počtu hran nakreslitelného grafu)**.** Každý graf nakreslený na plochu Γ splní $|E| \leq 3|V| - 3\chi(\Gamma)$.

Důkaz. Víme, že $s \leq \frac{2|E|}{3} \Rightarrow |V| - |E| + \frac{|E|}{3} \geq \chi(\Gamma) \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 3\chi(\Gamma)$. ⊞

Tvrzení 3 (Omezení stupně vrcholu nakreslitelného grafu)**.** Nechť $\Gamma \neq \Sigma_0$ je plocha a g je nakreslení G na Γ. Potom G obsahuje alespoň jeden vrchol stupně nejvýše $\left\lfloor \dfrac{5 + \sqrt{49 - 24\chi(\Gamma)}}{2} \right\rfloor$.

Důkaz. Pokud $\chi(\Gamma) = 1$: z odhadu $\frac{2|E|}{|V|} \leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{|V|}$ máme, že průměrný stupeň je ostře menší než 6, a tedy existuje vrchol stupně maximálně 5.
Pokud $\chi(\Gamma) = 0$: z odhadu $\frac{2|E|}{|V|} \leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{|V|}$ máme, že průměrný stupeň je ≤ 6, a tedy existuje vrchol stupně maximálně 6.
Jinak $\chi(\Gamma) < 0$: minimální stupeň je $\leq |V| - 1$. Máme tedy dva odhady, které chceme nějak spojit dohromady: $\delta(G) = |V| - 1 = 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{|V|} \Rightarrow \delta(G) = 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{\delta(G)+1} \Rightarrow \delta^2(G) + \delta(G) = 6(\delta(G) + 1 - 6\chi(\Gamma)$. Výsledkem je výše zmíněná nerovnost. ⊞

Algoritmus 2 (Lepší hladový algoritmus pro barvení grafu)**.**

1. Uspořádej vrchol $1 \ldots n$ postupným odtrháváním vrcholů nejmenšího stupně
2. Přiřaď barvy vrcholů hladově od konce

Věta 5 (Heawoodova formule)**.** Pokud $\Gamma \neq \Sigma_0$, tak $\forall$ graf G nakreslený na Γ má barevnost $\left\lfloor \dfrac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Gamma)}}{2} \right\rfloor$.

Poznámka (Značení maximálního a minimálního stupně)**.** $\Delta(G)$ je maximální stupeň vrcholu grafu, $\delta(G)$ je minimální stupeň.

Definice 17 (k-degenerovanost)**.** Graf je k-degenerovaný, pokud $\forall H \subseteq G : \delta(H) \leq k$.

Definice 18 (k-degenerovanost)**.** Graf je k-degenerovaný, pokud existuje uspořádání vrcholů $v_1, \ldots, v_n$ takové, že každý vrchol má maximálně d sousedů s menším indexem.

Lemma 4 (Ekvivalence definic k-degenerovanosti)**.** Obě definice k-degenerovanosti jsou ekvivalentní.

Důkaz. Def 1 $\Rightarrow$ def 2: Pořadí získáme postupným odtrháváním vrcholů stupně $\leq k$.
Obměna: $\neg$def 1 $\Rightarrow \neg$def 2: Nechť H má $\forall v : \deg(v) > K$. Pak neexistuje uspořádání $V(H)$ pro definici 2: poslední vrchol nemůže splnit podmínku stupně. ⊞

Lemma 5 (O maximálním stupni)**.** Nechť G je souvislý graf takovým že $\delta(G) < \Delta(G)$. Potom $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Důkaz. Tvrdíme, že G je $(\Delta - 1)$-degenerovaný a obarvíme hladově.
Nechť H je podgraf $G : H \neq G, \exists V \in V(H) : \exists x \in V(G) : x \notin V(H) : \{v, x\} \in E(G) \Rightarrow deg_H v \leq \Delta(G) - 1 \Rightarrow$ mám hledaný vrchol, který můžu obarvit. ⊞

Věta 6 (Brooksova)**.** Nechť G je souvislý, není úplný a není lichá kružnice. Potom $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Důkaz. Mám G souvislý, který není úplný a není lichá kružnice. Máme-li $\Delta(G) \leq 2$, jedná se o cestu nebo sudou kružnici, a tedy obarvení pracuje správně.
Dále předpokládejme $\Delta(G) \geq 3$, kde k_v označíme jako stupeň souvislosti G.
Pro $k_v = 1$: mám artikulaci. Rozdělím na dva menší grafy G_1, G_2, které se dotýkaly přes artikulaci. Nyní nutně $\delta(G_1) < \Delta(G_1), \delta(G_2) < \Delta(G_2)$. Z lemmatu o maximálním stupni můžeme obarvit a poté případně barvy přepermutovat.
Nyní uvažme $k_v = 2$. Pak mám vrcholový řez $\{x, y\}$, který mi dělí graf na dvě komponenty (může na víc, ale já si je pak můžu trošku popřepojovat). Z lemmatu o maximálním stupni mám opět obarvení obou komponent b_1, b_2 pomocí maximálně $\Delta(G)$ barev. Pokud $b_1(x) = b_1(y), b_2(x) = b_2(y)$, stačí přepermutovat. Stejně tak v případě $b_1(x) \neq b_1(y), b_2(x) \neq b_2(y)$ můžu přepermutovat.
Zbývá případ $b_1(x) = b_1(y), b_2(x) \neq b_2(y)$ a neexistují obarvení splňující výše. Pak $\deg_{G_1}(x) \geq \Delta(G) - 1, \deg_{G_1}(y) \geq \Delta(G) - 1$ - jinak bych mohl přebarvit na situaci b. Ovšem pak x, y mají stupně v $G_2 \leq 1$, a tedy mohu přebarvit v G_2 tak, že $b_2(x) = b_2(y)$. A protože $\Delta(G) \geq 3$, docházíme ke sporu, tedy tato situace nenastane.
Jinak mějme $k_v \geq 3$. G je souvislý a není úplný, tedy existují $x, y, z \in V : \{x, z\} \in E, \{y, z\} \in E, \{x, y\} \notin E$. Pak uspořádám vrcholy tak, že $v_1 = x, v_2 = y, \ldots, v_{|V|} = z$ a vrcholy $v_3, \ldots, v_{n-1}$ mají vždy alespoň jednoho souseda vpravo, tedy máme $\Delta(G) - 1$ degenerovanost na všech vrcholech kromě z. Hladovým algoritmem obarvím $v_1, \ldots, v_{n-1}$ pomocí $\Delta(G)$ barev. Pak obarvím i $v_n = z$. Ten sice může mít stupeň $\Delta(G)$, ale sousedí s x a y, které oba dostanou barvu 1, a tedy lze i poslední vrchol obarvit $\Delta(G)$ barvami. ⊞

Definice 19 (Hranové obarvení)**.** Funkce $f : E \to B$ je hranové obarvení grafu $G = (V, E)$, pokud libovolné dvě hrany sdílející společný vrchol nemají stejnou barvu.

Definice 20 (Hranová barevnost)**.** Hranová barevnost grafu $G = (V, E)$ je nejmenší $k \in \mathbb{N} : \exists$ hranové obarvení $f : E \to B : |B| = k$.

Věta 7 (Vizingova)**.** Každý graf $G(V, E)$ má $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Důkaz. Sporem: nechť existuje $G : \chi_e(G) > \Delta(G) + 1$.
Buď H největší podgraf hranově obarvitelný $\Delta(G) + 1$ barvami, a b je takové obarvení.
Označíme $e_0 = \{x, y_0\}$ libovolnou neobarvenou hranu.
O barvě ω řekneme, že je volná ve vrcholu v, jestliže $\forall e \in E : v \in e \Rightarrow b(e) \neq \omega$. Nechť $e_1 = \{x, y_1\}, \ldots, e_k = \{x, y_k\}$ je maximální posloupnost navzájem různých hran taková, že $b(e_{i+1})$ je volná u $y_i \forall i \in [k-1] \cup \{0\}$.
Jako barvu α si označíme barvu, která je volná u x. Jako β si označíme barvu, která je volná u y_k.
Pokud $\alpha = \beta$, jsme schopni provést „akci Kulový blesk“: $b(e_k) = \alpha$, pro $0 \leq i < k : b(e_i) =$ barva volná u y_{i+1} a máme spor s maximalitou. Jinak je β použitá k obarvení hrany $e_j = \{x, y_j\}, j \in [k-1]$. Označíme $\gamma = b(e_j)$.
Jako $H_{\beta\gamma}$ označíme podgraf H, který obsahuje pouze hranami barvy β nebo γ.
Zpozorujeme, že $\forall v \in V(H_{\beta\gamma}) : \deg_{H_{\beta\gamma}}(v) \leq 2$ a navíc platí-li rovnost, jedna hrana má baru β a druhá γ.
Totéž platí pro $H_{\alpha\beta}$. Komponenty $H_{\alpha\beta}$ jsou pouze kružnice a cesty. Navíc $\deg_{H_{\alpha\beta}}(y_k) = 1$, a tedy je začátkem cesty. Označíme P komponentu (cestu) $H_{\alpha\beta}$ obsahující y_k. Pokud druhý konec této cesty není y_l, pak můžeme cestu barevně zalternovat a převedeme na předchozí případ.
Jinak mějme konec cesty na y_l. Pak je v y_l β volná barva, a tedy $y_l = y_{j-1}$, a můžeme zalternovat a přebarvit. ⊞

Definice 21 (Perfektní graf)**.** Graf $G = (V, E)$ je perfektní, jestliže $\forall H$ indukovaný podgraf G platí $\chi(H) = \omega(H)$.

Definice 22 (Rozlehlá nezávislá množina)**.** Rozlehlá nezávislá množina v G je nezávislá množina $I \subseteq V(G)$ taková, že každá klika velikosti $\omega(G)$ obsahuje (alespoň) jeden vrchol $v \in I$.

Lemma 6 (Perfektnost a rozlehlé nezávislé množiny)**.** G je perfektní $\Leftrightarrow$ $\forall$ indukovaný podgraf $H \subseteq G$ obsahuje rozlehlou nezávislou množinu.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: rozlehlá nezávislá množina je jedna barevnostní třída $\omega(H)$-obarvení.
„$\Leftarrow$“: Vytvoříme posloupnost $G_1 = G, G_2 \dots, G_{\omega(G)}$ takovou, že $G_i = G_{i-1} \setminus \mathrm{RNM}(G_{i-1})$ pro $1 < i \leq \omega(G)$. Tímto nutně pokryjeme všechny kliky: v každém kroku se velikost největší kliky sníží právě o 1, a navíc jednotlivé odebrané množiny jsou nezávislé množiny, a tedy je můžeme použít jako jednotlivé barevnostní třídy. $\boxplus$

Definice 23 (Nafouknutí vrcholu na kliku)**.** Z vrcholu v udělám kliku, $N(v)$ jsou spojeni se všemi vrcholy kliky.

Lemma 7 (O perfektnosti nafouknutého grafu)**.** Nechť G je perfektní a G' vznikl nafouknutím vrcholu z G na kliku. Pak G' je perfektní.

Důkaz. „$\Leftarrow$“: z definice: G je indukovaný podgraf G'.
„$\Rightarrow$“: indukcí podle počtu vrcholů: (báze: $|V| = 1$ - triviální)
Mám G perfektní, chci G' perfektní. Označme si nafouknutý vrchol v (budeme nafoukávat jen na 2-kliku, druhý vrchol bude v').
Uvažme libovolný indukovaný ostrý podgraf G'. Ten je buď izomorfní podgrafu G, nebo jej lze získat nafouknutím vrcholu v na nějakém indukovaném ostrém podgrafu G. Tedy nám stačí ukázat, že $\chi(G') \leq \omega(G')$ (rovnost plyne z toho, že barevnost nemůže být menší než klikovost).
Pokud v je v G v maximální klice, pak tuto největší kliku nafouknutím zvětšíme, a tedy $\omega(G) - 1 = \omega - (G')$. Tedy v' obarvíme novou barvou.
Jinak v není v G v maximální klice. Pak $\omega(G') = \omega(G)$. Z předpokladu umíme obarvit všechny vrcholy kromě v'. Můžeme obarvit celý graf až na v'. Potom uvážíme třídu barevnosti $C[v] \setminus \{v\}$. Graf $G \setminus (C[v] \setminus \{v\})$ má klikovost ostře menší, přesně o 1, navíc se jedná o indukovaný podgraf. Tedy můžeme ho obarvit $\omega(G) - 1$ barvami. Poté ovšem můžeme přidat $(C[v] \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$ jako další třídu barevnosti, a tím máme $\omega(G)$-obarvení, což jsme chtěli. $\boxplus$

Lemma 8 (O barevnosti a největší nezávislé množině)**.** Pro graf G platí: $\chi(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

Věta 8 (Slabá věta o perfektních grafech)**.** G je perfektní $\Leftrightarrow$ $\overline{G}$ je perfektní ($\overline{G}$ je doplněk G)

Důkaz. „$\Rightarrow$“ - stačí jeden směr. Budeme dokazovat sporem.
Nechť G je perfektní, $\overline{G}$ není perfektní a G je nejmenší takový. Z definice tedy $\exists H \subseteq \overline{G} : \chi(H) > \omega(H)$, navíc z lemmatu H nemá rozlehlou nezávislou množinu. Z toho, že G je nejmenší protipříklad plyne $H = \overline{G}$. Tedy pro každou nezávislou množinu I v H existuje klika $|Q| = \omega(H)$ neobsahující vrchol $I \Rightarrow \forall$ kliku Q_G v G existuje nezávislá množina $|I| = \alpha(G)$ neobsahující vrchol kliky Q_G.
Nechť $Q_1, \dots, Q_t$ jsou všechny kliky v G a $I_1, \dots, I_t$ jsou maximální (tj. velikosti $\alpha(G)$) nezávislé množiny takové, že I_i jsou disjunktní s Q_i.
Vytvořím funkci $f : V(G) \to \mathbb{N}_0 : f(v) = |\{I_i : v \in I_i, i \in [t]\}|$.
Pak přetvoříme G do G^* tak, že každý vrchol $v \in V(G)$ nafoukneme do kliky o velikosti $f(v)$. Pokud $f(v) = 0$, vrchol smažeme.
Z lemmatu o perfektnosti nafouknutého grafu máme, že G^* je perfektní, pak můžu I_i rozdělit disjunktně.
Z lemmatu o barevnosti a největší nezávislé množině: $\chi(G^*) \geq \dfrac{|V(G^*)|}{\alpha(G^*)} = \dfrac{|V(G^*)|}{\alpha(G)} = \dfrac{\alpha(G) \cdot t}{\alpha(G^*)} = t$.
G^* je perfektní, tedy $\chi(G^*) = \omega(G^*)$, ale $t > \omega(G^*)$. Nechť Q^* je největší klika v G^*: ta vznikla nafouknutím Q_i v G, tedy $|Q^*| = \sum_{x \in Q} f(x) = \sum_{x \in Q} |\{I_i : v \in I_i, i \in [t]\}| \leq t - 1 \Rightarrow t < t - 1 \Rightarrow$ spor. $\boxplus$

Definice 24 (Chordální graf)**.** Graf $G = (V, E)$ je chordální, pokud neobsahuje indukovanou kružnici délky ≥ 4.

Definice 25 (x, y-řez)**.** Pro graf G a dva různé vrcholy $x, y \in V(G)$ řekneme, že $R \subseteq V(G)$ je x, y-řez, pokud x a y jsou v různých komponentách $G - R$.

Lemma 9 (Chordální graf a klikový x, y-řez)**.** Graf $G = (V, E)$ je chordální $\Leftrightarrow$ Pro každé dva různé nesousední vrcholy x, y existuje v G x, y-řez, který je klika.

Důkaz. „$\Leftarrow$“ obměnou: Nechť G není chordální, tedy nechť C je indukovaná kružnice délky ≥ 4. Dále nechť $u, v \in C$ jsou nesousední vrcholy (libovolné). C obsahuje 2 vnitřně disjunktní cesty z u do v, tedy u, v-řez musí obsahovat alespoň 2 nesousední vrcholy z C, tedy žádný u, v-řez není klika.
„$\Rightarrow$“: Nechť G je chordální, $x, y \in V(G)$ jsou nesousední vrcholy. Vezmu nejmenší x, y řez R. Tvrdím, že R je klika, což ukážeme sporem.
Nechť v R jsou u, v nesousední vrcholy. Označíme G_x, G_y jako komponenty řezu obsahující x, y. Z minimality řezu mají vrcholy u, v každý alespoň jednoho souseda v G_x i G_y.
Nechť P_x je nejkratší cesta z u do v, jejíž vnitřní vrcholy jsou v grafu G_x. Analogicky vytvoříme P_y.
Potom $P_x \cup P_y$ je indukovaná kružnice v G délky alespoň 4. Tedy G není chordální, a tedy R musí být klika, což bylo dokázati. ⊞

Definice 26 (Simpliciální vrchol)**.** Vrchol x v grafu G je simpliciální, pokud $N(x)$ tvoří kliku v G

Lemma 10 (Chordální graf obsahuje simpliciální vrchol)**.** Každý chordální graf s alespoň 1 vrcholem obsahuje simpliciální vrchol.

Důkaz. Dokážeme silnější tvrzení: každý chordální graf je buď úplný, nebo obsahuje dva nesousední simpliciální vrcholy. Dokážeme indukcí podle počtu vrcholů neprázdného chordálního grafu $G = (V, E)$.
Báze: $|V| = 1 : G$ je úplný.
Indukční krok: nechť $|V| \geq 2$ a g není úplný. Pak mějme x, y nesousední vrcholy. Z lemmatu o klikovém x, y-řezu máme x, y-řez R, který je klika. Pak mějme komponenty G_x, G_y. komponenty $G - R$ obsahující x a y.Dále G_y^+, G_y^+ jsou grafy indukované $G_x \cup R, G_Y \cup R$.
Na G_x^+, G_y^+ aplikuji indukci. Navíc tvrdím, že G_x^+, G_y^+ obsahuje simpliciální vrchol s_x, s_y nepatřící do R.
Z indukce mám, že G_x^+ je úplný, nebo má dva nesousední simpliciální vrcholy. Pokud je úplný, beru $s_x \in V(G_x)$ libovolně. Jinak má dva nesousední simpliciální vrcholy, a tedy jeden z nich není v R z klikovosti R. Analogicky s_y s G_y^+ a mám dva hledané nesousední simpliciální vrcholy s_x, s_y. ⊞

Definice 27 (Perfektní eliminační schéma (PES))**.** Perfektní eliminační schéma (PES) grafu $G = (V, E)$ je uspořádání vrcholů do posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n : n = |V|$, kde pro každé $i \in [n]$ platí, že x_i je simpliciální v podgrafu G indukovaném vrcholy $\{x_1, \ldots, x_i\}$.

Věta 9 (PES a chordalita)**.** Graf G je chordální $\Leftrightarrow$ G má PES.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Indukcí podle $|V|$:
Báze: $|V| = 1 : a_1 = v$
IK: $|V| > 1$: Jako $a_{|V|}$ volím libovolný simpliciální vrchol a PES$(G - v)$ bude $(a_1, \ldots, a_{|V|-1})$ z IP.
„$\Leftarrow$“: Sporem: nechť G má indukovanou kružnici C délka alespoň 4, a $x_1, \ldots, x_n$ je PES(G) a x_i je nejpravější vrchol C v PES. Pak x_i nesplňuje podmínku simpliciality, tedy $x_1, \ldots, x_n$ není PES, a máme kýžený spor. ⊞

Důsledek 2 (Důsledky PES a chordality)**.**

1. Pro G lze v polynomiálním čase zjistit, zda je chordální
2. Pro chordální G lze v polynomiálním čase zjistit $\omega(G)$
3. Pro chordální G lze v polynomiálním čase zjistit $\chi(G)$
4. Pro chordální G lze v polynomiálním čase zjistit $\alpha(G)$
5. Pro chordální G platí $\chi(G) = \omega(G)$

Definice 28 (Hamiltonovský graf)**.** Graf G je hamiltonovský, pokud obsahuje kružnici procházející všemi vrcholy G.

Věta 10 (Bondy-Chvátalova)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf, $|V| = n, x, y$ jsou nesousední vrcholy $x \neq y$ takové, že $\deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$. Nechť $G^+ := (V, E \cup \{\{x, y\}\})$. Potom G je hamiltonovský $\Leftrightarrow$ G^+ je hamiltonovský.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: triviální - přidávám hranu.
„$\Leftarrow$“: G^+ má hamiltonovskou kružnici C. Pokud $\{x, y\} \notin C$, máme hotovo.
Jinek nechť $\{x, y\} \in C$. Očíslujeme vrcholy $x_1, \dots, x_n$ podle pořadí na $C : x = x_1, y = x_n$.
Tvrdíme, že $\exists i \in [n-2] \setminus \{1\} : \{x, x_{i+1}\} \in E, \{y, x_i\} \in E$.
Zadefinujeme $I_x := \{i \in \{2, \dots, n-2\} : \{x, x_{i+1}\} \in E\}, I_y = \{i \in \{2, \dots, n-2\} : \{y, x_{i+1}\} \in E\}$. Víme, že $|I_x| = \deg_G(x) - 1, |I_y| = \deg_G(y) - 1 \Rightarrow |I_x| + |I_y| = \deg_G(x) + \deg_G(y) \leq n-2$ a navíc $|I_x \cup I_y| \leq n-3$, a tedy $I_x \cap I_Y \neq \emptyset$. Pak můžu vytvořit novou kružnici C' pro $i \in I_x \cap I_y : C' = (C \setminus \{\{x, y\}, \{x_i, x_{i+1}\}\}) \cup \{\{x, x_{i+1}\}, \{y, x_i\}\}$. $\boxplus$

Definice 29 (Multigraf)**.** Multigraf je $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je multimnožina $\binom{V}{2} \cup V$.

Definice 30 (Most)**.** Hrana je most, pokud jejím odstraněním stoupne počet komponent souvislosti.

Definice 31 (Kontrakce hrany na multigrafu)**.** Pro multigraf $G = (V, E)$ značíme multigraf G/e vzniklý kontrakcí hrany e. Pokud e je smyčka, uvážíme $G/e = G - e$.

Definice 32 (Univerzální polynom)**.** Univerzální polynom grafu G definujeme jako $U_G(x, y, \alpha, \sigma, \tau)$, přičemž $U_G(x, y, \alpha, \sigma, \tau) = \alpha^{|V(G)|}$, pokud G nemá hrany, $U_G(x, y, \alpha, \sigma, \tau) = x \cdot U_{G-e}(x, y, \alpha, \sigma, \tau)$, pokud e je most, $U_G(x, y, \alpha, \sigma, \tau) = y \cdot U_{G-e}(x, y, \alpha, \sigma, \tau)$ pokud e je smyčka, $U_G(x, y, \alpha, \sigma, \tau) = \sigma \cdot U_{G-e}(x, y, \alpha, \sigma, \tau) + \tau \cdot U_{G/e}(x, y, \alpha, \sigma, \tau)$.

Definice 33 (Hodnost a nulita grafu)**.** Pro multigraf $G = (V, E)$ definujeme:

- $k(G) := \#$ komponent G
- hodnost (rank) $r(E) := |V| - k(G)$
- nulitu $n(E) := |E| - r(E)$

Definice 34 (Tutteův polynom)**.** Tutteův polynom multigrafu $G = (V, E)$ je polynom v proměnných x, y: $T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(R)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)}$

Tvrzení 4 (Tutteův polynom a počet koster)**.** Nechť G je souvislý multigraf. Potom $T_G(1, 1)$ je počet koster G. (pro tento případ definujeme „$0^0 = 1$“)

Důkaz. $T_G(1, 1) = \sum\limits_{F \subseteq E} 0^{r(E)-r(F)} \cdot 0^{n(F)} = \#$ koster: $r(E) - r(F) = 0$ je-li F souvislá a $n(F) = 0$ je-li f acyklická. $\boxplus$

Tvrzení 5 (O dvou téměř nesousedních multigrafech a Tutteově polynomu)**.** Nechť $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ jsou multigrafy splňující $|V_1 \cap V_2| \leq 1 \wedge |E_1 \cap E_2| = 0$.
Potom $T_G(x, y) = T_{G_1}(x, y) \cdot T_{G_2}(x, y)$.

Důkaz. $\forall F \subseteq E_1 \cup E_2 : \exists F_1 \subseteq E_1, F_2 \subseteq E_2 : F_1 \cup F_2 = F, F_1 \cap F_2 = \emptyset$.
Pak $r(F) = r(F_1) + r(F_2), n(F) = n(F_1) + n(F_2)$.
Tedy $T_G(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} (y-1)^{n(F)} = \sum\limits_{F_1 \subseteq E_1} \sum\limits_{F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{r(E)-r(F)} (y-1)^{n(F)} = \sum\limits_{F_1 \subseteq E_1} (x-1)^{r(E_1)-r(F_1)} (y-1)^{n(F_1)} \sum\limits_{F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{r(E_2)-r(F_2)} (y-1)^{n(F_2)} = T_{G_1}(x, y) \cdot T_{G_2}(x, y)$. $\boxplus$

Důsledek 3 (Tutteův polynom a most)**.** Pokud e je most G, pak $T_{G-e}(x, y) = T_{G/e}(x, y)$

Věta 11 (Výpočet Tutteova polynomu)**.** Nechť $G = (V, E)$ je multigraf. Potom $T_G(x, y)$ je jednoznačně určen pomocí rovností:

- Pokud $E = \emptyset : T_G(x, y) = 1$
- Pokud $E \neq \emptyset \wedge e \in E$ je most: $T_G(x, y) = xT_{G-e}(x, y) = xT_{G/e}(x, y)$
- Pokud $E \neq \emptyset \wedge e \in E$ je smyčka: $T_G(x, y) = yT_{G-e}(x, y) = yT_{G/e}(x, y)$
- Pokud $E \neq \emptyset \wedge e \in E$ je normální hrana: $T_G(x, y) = T_{G-e}(x, y) + T_{G/e}(x, y)$

Důkaz. $T_G(x,y) = \sum_{F\subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)} \overset{e \text{ pevná}}{=} \sum_{F\subseteq E, e\notin F} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)} + \sum_{F\subseteq E, e\in F} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)} \overset{\text{označím sumy}}{=} s_1 + s_2$
Když e není most, $s_1 = T_{G-e}(x,y)$
Když e je most, $s_1 = (x-1)T_{G-e}(x,y)$
Když e není smyčka, $s_2 = T_{G/e}(x,y)$
Když e je smyčka, $s_2 = (Y-1)T_{G/e}(x,y)$

⊞

Věta 12 (Recipe theorem)**.** Nechť G je multigraf. Pokud je splněno $\sigma \neq 0, \tau \neq 0$, platí $:G(x,y,\alpha,\sigma,\tau) = \alpha^{K(G)}\sigma^{n(E)}\tau^{r(E)} \cdot T_G\left(\frac{\alpha x}{\tau}, \frac{y}{\sigma}\right)$.
Jinak

- $U_G(x,y,\alpha,\sigma,0) = \alpha^{|V(G)|}\sigma^{n(E)} - l(E)x^{r(E)}y^{l(E)}$, kde $l(E) := \#$ smyček
- $U_G(x,y,\alpha,0,\tau) = \alpha^{K(G)+P(G)}\tau^{r(E)-P(G)}x^{P(G)}y^{n(E)}$, kde $P(G) := \#$ mostů

Důkaz. Pokud $E = \emptyset$, tvrzení platí: $\alpha^{|V|} = \alpha^{K(G)}$.
Pokud G má m mostů, l smyček, k komponent a 0 normálních hran:
$U_G = \alpha^{k-m}x^m y^l$. $r(E) = m, n(E) = l, T_G\left(\dfrac{\alpha x}{\tau}, \dfrac{y}{\sigma}\right) = \left(\dfrac{\alpha x}{\tau}\right)^m \cdot \left(\dfrac{y}{\sigma}\right)^l$. Po dosazení vyjde rovnost.
Pokud e je normální hrana: $K(G) = K(G-e) = K(G/e), r(G-e) = r(G), n(G-e) = n(G)-1, r(G/e) = r(G)-1, n(G/e) = n(G)$.
Po rozepsání (TODO) vyjde. ⊞

Definice 35 (Chromatický polynom)**.** Chromatický polynom multigrafu $G = (V,E)$ je funkce $Ch_G(b) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$: pro $b \in N_0$ je $Ch_G(b)$ rovno počtu různých obarvení pomocí b barev.

Věta 13 (O chromatickém a Tutteově polynomu)**.** Pro každý multigraf $G = (V,E)$ platí: $Ch_G(b) = b^{K(G)} \cdot (-1)^{r(E)} \cdot T_G(1-b, 0)$.

Důkaz. Zvolíme $\alpha = b, y = 0, x = 1 - \frac{1}{b}, \sigma = 1, \tau = -1$. ⊞

Definice 36 (Formální mocninná řada)**.** Posloupnost $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ nebo $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ reálných čísel je formální mocninná řada.
Pro $A(x), B(x) \in R[[x]] : A(x) + B(x) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n, A(x) \cdot B(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n : c_n = \prod_{i=0}^n a_i b_{n-i}$.

Fakt 6 (Vlastnosti množiny formálních mocninných řad)**.** $R[[x]]$ je komutativní okruh i vektorový prostor s neutrálními prvky 0 ke sčítání a 1 k násobení.

Definice 37 (Převrácená hodnota formální mocninné řady)**.** Převrácená hodnota formální mocninné řady $A(x) \in R[[x]]$ značená $\frac{1}{A(x)}$ nebo $A^{-1}(x)$ je formální mocninná řada $B(x) \in R[[x]]$ taková, že $A(x) \cdot B(x) = 1$.

Tvrzení 6 (O existenci převrácené hodnoty formální mocninné řady)**.** Nechť $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^x$ je formální mocninná řada. Potom $A^{-1}(x)$ existuje $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$. Navíc, pokud existuje, je určena jednoznačně.

Důkaz. Hledáme $B(x)$ takovou, že $A(x) \cdot B(x) = 1$.
Vidíme, že $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{a_0}$ Dále $a_0 b_1 + b_0 a_1 = 0 \Rightarrow b_1 = \dfrac{-b_0 a_1}{a_0}$. A obecně $b_n = \dfrac{(-1)(a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0}{a_0}$.
Z toho plyne jednoznačné určení právě tehdy, když $a_0 \neq 0$. ⊞

Definice 38 (Derivace formální mocninné řady)**.** Pro $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in R[[n]]$ definujeme derivaci $A(x)$ značenou $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x) = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} \cdot (n+1)x^n$.

Definice 39 (Obyčejná vytvořující funkce)**.** Nechť $\mathcal{A}$ je množina, jejíž každý prvek $a \in \mathcal{A}$ má definovanou velikost $|a| \in \mathbb{N}_0$ a navíc platí, že $\forall n \in N_0$ je v $\mathcal{A}$ jen konečně mnoho prvků $a \in \mathcal{A} : |a| = n$. Potom označíme $\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} : |a| = n\}, a_n = |\mathcal{A}_n|$.
Potom obyčejná vytvořující funkce $\mathcal{A}$ je formální mocninná řada: $\mathrm{OVF}(\mathcal{A}) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

Pozorování (O obecných vytvořujících funkcích)**.** Pokud $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou disjunktní, pak OVF$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ = OVF$(\mathcal{A})$+ OVF$(\mathcal{B})$.

Definice 40 (Exponenciální vytvořující funkce)**.** Nechť $\mathcal{A}$ je množina splňující

- $\forall a \in \mathcal{A} : V(a) \subset \mathbb{N} \wedge |V(a)| < \infty$
- $\forall V \subset \mathbb{N} : |V| < \infty : |\{a \in \mathcal{A} : V(a) = V\}| < \infty$
- $\forall V, W \subset \mathbb{N} : |V| = |W| < \infty : |\{a \in \mathcal{A} : V(a) = V\}| = |\{a \in \mathcal{A} : V(a) = W\}|$

Potom exponenciální vytvořující funkce pro $\mathcal{A}$ je EVF$(\mathcal{A})$=$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^n}{n!}$, kde $a_n = |\{a \in \mathcal{A} : V(a) = [n]\}|$.

Tvrzení 7 (Vlastnosti exponenciálních vytvořujících funkcí)**.** Nechť $A(x)$ je EVF$(\mathcal{A})$ a $B(x)$ je EVF$(\mathcal{B})$.

- Pokud $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, pak $A(x) + B(x) = \text{EVF}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.
- $A(x) \cdot B(x) = \sum c_n \cdot \frac{x^n}{n!}$, pak $c_n = \#$ uspořádaných dvojic $(a, b) : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, V(a) \cap V(b) = \emptyset, V(a) \cup V(b) = [n]$
- $A^k(x) = \sum d_n \cdot \frac{x^n}{n!}$, kde $d_n = \#$ uspořádaných k-tic $(a_i)_{i=1}^k$ takových, že $\forall i \neq j \in [k] : a_i \cap a_j = \emptyset, \bigcup_{i=1}^k a_i = [n]$
- Pokud $\forall a \in \mathcal{A} : V(a) \neq \emptyset$, pak $\frac{A^k(x)}{k!} = \#$ neuspořádaných k-tic $(a_i)_{i=1}^k$ takových, že $\forall i \neq j \in [k] : a_i \cap a_j = \emptyset, \bigcup_{i=1}^k a_i = [n]$
- $\exp(A(x)) = 1 + A(x) + \dfrac{A^2(x)}{2} + \dfrac{A^3(x)}{3!} + \ldots = \sum f_n \cdot \frac{x^n}{n!}$, kde $f_n = |\{\{a_1, \ldots, a_j\} : \forall k \neq m : a_k \cap a_m = \emptyset, \bigcup\limits_{i=1}^{j} V(a_i) = [n]\}|$

Definice 41 (Grupa)**.** Grupa Γ je množina Γ s binární operací $\cdot$ (skládání) taková, že

- $\forall a, b \in \Gamma : a \cdot b \in \Gamma$
- $\forall g_1, g_2, g_3 \in \Gamma : (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
- $\exists 1_\Gamma \in \Gamma : \forall g \in \Gamma : 1_\Gamma \cdot g = g = g \cdot 1_\Gamma$
- $\forall g \in \Gamma \exists g^{-1} \in \Gamma : g \cdot g^{-1} = 1_\Gamma$

Definice 42 (Akce grupy)**.** Pro grupu Γ a množinu $\mathcal{A}$ nazveme zobrazení $\cdot : \Gamma \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ akcí grupy na množině $\mathcal{A}$, jestliže

- $\forall g_1, g_2 \in \Gamma, a \in \mathcal{A} : g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1 \cdot g_2) \cdot a$
- $\forall a \in \mathcal{A} : 1_\Gamma \cdot a = a$

Definice 43 (Množina pevných bodů prvku grupy)**.** Nechť G je grupa a $\cdot : G \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je její akce. Množina pevných bodů $g \in G$ je $\text{Fix}(g) := \{x \in A : g \cdot x = x\}$

Definice 44 (Stabilizátor prvku, na němž má grupa akci)**.** Nechť G je grupa a $\cdot : G \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je její akce. Stabilizátor $x \in \mathcal{A}$ je $\text{stab}(x) := \{g \in G : g \cdot x = x\}$

Pozorování (O stabilizátoru)**.** $\text{stab}(x)$ je podgrupa.

Definice 45 (Ekvivalence v akci)**.** Nechť G je grupa a $\cdot : G \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je její akce. Pak řekneme, že prvky $x, y \in \mathcal{A}$ jsou ekvivalentní v akci $\cdot$, pokud $\exists g \in G : g \cdot x = y$

Pozorování (O ekvivalenci v akci)**.** Označme relaci ekvivalence v akci jako $\sim_G$. Pak $\sim_G$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Definice 46 (Orbita)**.** Nechť G je grupa a $\cdot : G \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je její akce. Pak orbita obsahující $x \in \mathcal{A}$ je množina $[x]_G = \{g \in \mathcal{A} : x \sim_G g\} = \{g \cdot x : g \in G\}$.

Lemma 11 (O orbitě a stabilizátoru)**.** Nechť G je konečná grupa s akcí na $\mathcal{A}$. Pak $\forall x \in \mathcal{A} : |\mathrm{stab}(x)| \cdot |[x]_G| = |G|$.

Lemma 12 (Burnsideovo)**.**

1. Pokud $\mathcal{A}$ je konečná, pak $|\mathcal{A}/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum\limits_{g \in G} |\mathrm{Fix}(G)|$
2. Nechť má každá orbita $o \in \mathcal{A}/G$ přiřazena váhu $w(o)$. Pak $\sum_{o \in \mathcal{A}/G} w(o) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum\limits_{g \in G} \sum\limits_{x \in \mathrm{Fix}(G)} w([x]_G)$

Důkaz. 1 plyne z 2 přiřazením $w(o) = 1$ pro každou orbitu o.
Dokážeme 2: budeme počítat dvěma způsoby $s = \sum\limits_{\substack{(g,x) \in G \times \mathcal{A} \\ g \cdot x = x}} w([x]_G)$.
1. způsob: $s = \sum\limits_{g \in G} \sum\limits_{x \in \mathrm{Fix}(G)} w([x]_G)$
2. způsob: $s = \sum\limits_{x \in \mathcal{A}} \sum\limits_{g \in \mathrm{stab}(\mathcal{A})} w([x]_G) = \sum\limits_{o \in \mathcal{A}/G} \sum\limits_{x \in o} \sum\limits_{g \in \mathrm{stab}(\mathcal{A})} w([x]_G) = \sum\limits_{o \in \mathcal{A}/G} \sum\limits_{x \in o} |\mathrm{stab}(x)| \cdot w(o) = \sum\limits_{o \in \mathcal{A}/G} \sum\limits_{x \in o} \frac{|G|}{|o|} \cdot w(o) = \sum\limits_{o \in \mathcal{A}/G} |G| \cdot w(o)$

⊞

Extremální teorie grafů a hypergrafů

Definice 47 (Turánův graf)**.** Pro $k, n \in \mathbb{N}$ označíme $T_k(n)$ úplný k-partitní graf na n vrcholech, jehož všechny partity mají velikost $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{k} \rceil$. Těmto grafům se říká Turánovy grafy.
Dále označíme $t_k(n)$ počet hran grafu $T_k(n)$.

Poznámka (Značení extremální funkce)**.** Pro graf H značíme $\mathrm{ex}(n, H)$ největší $m \in \mathbb{N}$ takové, že existuje graf s n vrcholy a m hranami neobsahující H jako podgraf.

Pozorování (Dolní odhad na extremální funkci K_r)**.** $\forall r \in \mathbb{N}, r \geq 2 : \mathrm{ex}(n, K_r) \geq t_{r-1}(n)$ - $T_{r-1}(n)$ zjevně neobsahuje K_r jako podgraf.

Lemma 13 (O velikosti k-partitního grafu)**.** Každý k-partitní graf na n vrcholech má nejvýše $t_k(n)$ hran.

Důkaz. Nechť $G = (V, E)$ je k-partitní, $|V| = n$, $|E|$ co největší. Nechť $P_1, \ldots, P_k$ jsou partity $G : |P_1| \leq |P_2| \leq \ldots \leq |P_k|$.
Pokud $|P_k| \leq |P_1| + 1$, pak $G \cong T_K(n)$ a jsme hotovi.
Kdyby ovšem $|P_k| \geq |P_1| + 2$, volíme $x \in P_k$, a vytvoříme $\hat{G}$ úplný k-partitní graf s partitami $P_1 \cup \{x\}, P_2 \ldots, P_{k-1}, P_k \setminus \{x\}$. Potom $|E(\hat{G})| > |E(G)| \Rightarrow$ spor s maximalitou. ⊞

Lemma 14 (O počtu hran a $(r-1)$-partitnosti)**.** Nechť $G = (V, E)$ je graf neobsahující K_r jako podgraf. Potom $\exists (r-1)$-partitní graf $H = (V, E_H)$ takový, že $\forall x \in V : \deg_G(x) \leq \deg_H(x)$, a tedy $|E| \leq |E_H|$.

Důkaz. Důkaz povedeme indukcí podle r.
Báze: $r = 2$: G neobsahuje K_2, tedy neobsahuje hrany. Už samotný G je 1-partitní, a tedy $H = G$.
IK: $r > 2$: Nechť G neobsahuje K_r a nechť x je vrchol největšího stupně v G.
Označíme $S := N(x), G_S = G[S]$. G_S neobsahuje K_{r-1} - jinak by $G[S \cup \{x\}]$ obsahoval K_r.
Na G_S tedy použijeme indukční předpoklad: máme $(r-2)$-partitní graf $H_S = (S, E_{H_S})$ splňující $\forall y \in S : \deg_{G_S}(y) \leq \deg_{H_S}(y)$.
Nechť H je graf na vrcholech V s hranami $E_{H_S} \cup \{\{u, v\} : u \in S, v \in V \setminus S\}$. Tento graf je zjevně $(r-1)$-partitní.
Ověříme podmínku na stupně:
Pokud $y \in V \setminus S : \deg_H(y) = |S| = \deg_G(x) \overset{\text{z volby } x}{\geq} \deg_G(x)$
Pokud $y \in S : \deg_H(y) = \deg_{H_S}(y) + |V \setminus S| \overset{\text{IP}}{\geq} \deg_{G_S}(y) + |V \setminus S| \geq \deg_G(y)$. ⊞

Věta 14 (Turánova)**.** $\forall r \geq 2 : \mathrm{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n)$

Důkaz. Už víme, že $\mathrm{ex}(n, K_r) \geq t_{r-1}(n)$.
Nechť $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech bez K_r.
Z lemmatu o počtu hran a $(r-1)$-partitnosti existuje $(r-1)$-partitní graf $H = (V, E_H)$ splňující $|E| \geq |E_H|$.
Dále z lemmatu o velikosti k-partitního grafu plyne, že $|E_H| \leq t_{r-1}(n)$, a tedy $\mathrm{ex}(n, K_r) \leq t_{r-1}(n) \Rightarrow \mathrm{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n)$ ⊞

Definice 48 (Extremální minorová funkce)**.** Pro graf H označíme $\mathrm{ex}_{\succeq}(n, H) :=$ maximální počet hran v grafu na n vrcholech bez H-minoru.

Pozorování (Extremální a extremální minorová funkce)**.** $\mathrm{ex}(n, H) \geq \mathrm{ex}_{\succeq}(n, H)$ - pokud graf nemá H-minor, nemá ani H jako podgraf.

Pozorování (Extremální minorová funkce K_3)**.** $\mathrm{ex}_{\succeq}(n, K_3) = n - 1$ - grafy bez K_3-minoru jsou lesy.

Věta 15 (Lineární odhad na počet hran v grafu bez úplného minoru)**.** $\forall r \geq 3 \exists c_r > 0 : \mathrm{ex}_{\succeq}(n, K_r) < c_r \cdot n$.
Jinými slovy: každý graf $G = (V, E)$ splňující $|E| \geq c_r \cdot |V|$ obsahuje K_r jako minor.

Důkaz. Dokážeme pro $c_r = 2^{r-3}$ indukcí podle r:
Báze: $r = 3$: $c_r = 1$, tedy $\mathrm{ex}_{\succeq}(n, K_r) < n$, což jsme již odpozorovali.
Indukční krok: $r > 3$: sporem: $\exists G = (V, E)$ neobsahující K_r jako minor, splňující $|E| \geq c_r \cdot |V|$. Ze všech takových G zvolíme tak, aby $|V| + |E|$ bylo co nejmenší.
Pokud $G' = (V', E')$ je vlastní minor G, platí $|E'| < c_r \cdot |V'|0$, jinak by G' byl menší protipříklad.
Dále si ukážeme, že $\forall e\{x, y\} \in E$ platí $|N(x) \cap N(y)| \geq c_r$: Vezmeme $G'' = (V'', E'') = G.e$. Víme, že $|E| \geq c_r \cdot |V|, |E''| < c_r \cdot |V''| = c_r \cdot (|V| - 1)$. Z tohoto plyne $|E| - |E''| > c_r$. Navíc $|E| - |E''| = 1 + |N(x) \cap N(y)| \Rightarrow |N(x) \cap N(y)| \geq c_r$.
Dále uvažme x libovolný vrchol kladného stupně v G. Označme $S := N(x), G_S = G[S]$. Každý vrchol $y \in S$ splní $\deg_{G_S}(y) \geq c_r$ (z toho, že $|N(x) \cap N(y)| \geq c_r$. Tedy $|E(G_S)| \geq \frac{c_r}{2} \cdot |S| = c_{r-1} \cdot |S|$.
Z indukčního předpokladu a počtu hran G_S víme, že G_S má K_{r-1}-minor, a tedy G má K_r-minor, což je spor. ⊞

Definice 49 (k-uniformní hypergraf)**.** k-uniformní hypergraf je dvojice (V, E), kde $E \subseteq \binom{V}{k}$.

Definice 50 (Extremální funkce na hypergrafech s pronikajícím systémem množin)**.** $f(k, n) :=$ maximální m takové, že $\exists k-$uniformní hypergraf h s n vrcholy a m hranami takový, že E je „pronikající systém množin“, tj. $\forall e, e' \in E : e \cap e' \neq \emptyset$.

Pozorování (Jednoduché hodnoty a odhady extremální funkce na hypergrafech)**.** Pro $k > n : f(k, n) = 0$, protože neexistuje ani jedna k-hyperhrana.
Pro $k \leq n < 2k : f(k, n) = \binom{n}{k}$, protože každé dvě množiny z $\binom{V}{k}$ se protínají.
Pro $n \geq 2k : f(k, n) \geq \binom{n-1}{k-1}$, protože vezmu všechny k-prvkové množiny obsahující jeden konkrétní vrchol.

Věta 16 (Erdös-Ko-Radoova)**.** $\forall k, n \in \mathbb{N} : n \geq 2k \Rightarrow f(k, n) = \binom{n-1}{k-1}$

Důkaz. Mějme takový pronikající systém podmnožin $A, A \subseteq 2^{[n]}$. Pak si $[n]$ zpermutujeme do permutace s jedním cyklem, a uvážíme k-prvkové úseky z této permutace.
Ale všechny tyto k-tice nemůžou do A náležet najednou - těch nejvýše může být k. Pokud $(a_1, \ldots, a_k) \in A$, pak každá další k-tice ze stejné permutace rozděluje a_i a a_{i+1} pro nějaké i. Oba intervaly, které dělí téže prvky, jsou disjunktní, a tedy nejvýše jeden z nich může náležet do A. Tedy počet k-tic z dané permutace v A je $1 + \#$ rozdělených dvojic, tedy nejvýše $1 + (r - 1) = r$.
Budeme tedy počítat dvojice (S, C), kde $S \in A, C$ je permutace s jedním cyklem, pro kterou je S interval.
1. $\#(S, C) = |A| \cdot k! \cdot (n - k)!$: Pro každou S (těch je $|A|$) vyberu jednu permutaci S (těch je $k!$) a jednu permutaci zbytku (těch je $(n - k)!$).
2. $\#(S, C) = (n - 1)! \cdot k$: Je $(n - 1)!$ permutací s jedním cyklem, a každý cyklus má nejvýše (dokonce právě!) k intervalů z A.
Pak $|A| \cdot k! \cdot (n - k)! = (n - 1)! \cdot k \Rightarrow |A| = \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$. ⊞

Seznam témat