Poznámky - lineární algebra II
Petr Chmel

Definice 1 (Skalární součin)**.** Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Pak (komplexní) skalární součin je zobrazení $\langle \_, \_ \rangle : V^2 \to \mathbb{C}$ splňující:

1. $\forall x \in V : \langle x, x \rangle \geq 0$ a rovnost nastává pro $x = o$
2. $\forall x, y, z \in V : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{C} : \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Definice 2 (Norma indukovaná skalárním součinem)**.** Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $\langle \_, \_ \rangle$. Pak norma indukovaná skalárním součinem je $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Definice 3 (Kolmost)**.** Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Pak $x, y \in \mathbb{R}$ jsou kolmé, pokud $\langle x, y \rangle = 0$

Poznámka (Úhel)**.** Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Pak pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi$, kde φ je úhel svíraný vektory x, y.

Věta 1 (Pythagorova)**.** Pokud $x, y \in V$ jsou na sebe kolmé, pak $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Důkaz nad $\mathbb{R}$, u komplexních čísel jen pozor na komplexně sdružené (i když tady to je jedno).
$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ⊞

Věta 2 (Cauchy-Schwarzova nerovnost)**.** Nechť $x, y \in V$ a V má skalární součin $\langle \_, \_ \rangle$. Pak $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Důkaz nad $\mathbb{R}$, nad $\mathbb{C}$ ve skriptech.
Triviálně platí, pokud $x = o \lor y = o$.
Dále mějme $y \neq o$. Pak uvažme $f(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$.
Můžeme rozepsat: $f(t) = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle x, y \rangle$. To je vlastně kvadratická funkce pro t. A protože víme, že její hodnoty jsou kladné, její diskriminant musí být nekladný.
$D = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle x, y \rangle \leq 0$. Tedy $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$, tedy $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$, tedy $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ⊞

Důsledek 1 (Trojúhelníková nerovnost)**.** $\forall x, y \in V$ se skalárním součinem platí $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Důkaz. $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\Re(\langle x, y \rangle) \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$ ⊞

Definice 4 (Norma)**.** Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Pak norma je zobrazení $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ splňující:

1. $\forall x \in V : \|x\| \geq 0$ a rovnost nastane jen pro $x = o$.
2. $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x|$
3. $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tvrzení 1 (Norma indukovaná skalárním součinem je norma)**.** Každá norma indukovaná skalárním součinem je norma.

Důkaz. Vlastnost 1 plyne z vlastností normy indukované skalárním součinem, 3 plyne z trojúhelníkové nerovnosti.
Ukážeme platnost 2: $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \cdot \langle x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} \cdot \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2} \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|$ ⊞

Tvrzení 2 (Rovnoběžníkové pravidlo)**.** Pro normu indukovanou skalárním součinem a $x, y \in V$ platí $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Důkaz. $\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle+\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle=2\|x\|^2+2\|y\|^2$. ⊞

Definice 5 (Metrika)**.** Nechť M je množina. Pak zobrazení $d: M^2 \to \mathbb{R}$ je metrika, pokud splňuje:

1. $\forall x,y \in M: d(x,y)\geq 0; d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.
2. $\forall x,y \in M: d(x,y)=d(y,x)$
3. $\forall x,y,z \in M: d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

Definice 6 (Ortogonální a ortonormální systémy vektorů)**.** Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Pak systém vektorů $z_1,\dots,z_n \in V$ je

- ortogonální, pokud $\forall i,j, i\neq j: \langle z_i,z_j\rangle = 0$
- ortonormální, pokud $\forall i \in [n]: \langle z_i,z_i\rangle = 1$.

Věta 3 (Ortonormální systém je lineárně nezávislý)**.** Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Jsou-li vektory $z_1,\dots,z_n \in V$ ortonormální, pak jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Nechť $o=\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$. Pro dané i: $0=\langle o,z_i\rangle=\langle\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i, z_i\rangle=\sum_{i=1}^n \alpha_i\langle z_i,z_i\rangle=\alpha_i\langle z_i,z_i\rangle=\alpha i$. Předposlední rovnost plyne z ortogonality, poslední z ortonormality. ⊞

Věta 4 (Fourierovy koeficienty)**.** Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $z_1,\dots,z_n \in V$ je ortonormální báze V. Pak pro $x\in V: x=\sum_{i=1}^n\langle x,z_i\rangle z_i$. Tyto koeficienty nazýváme Fourierovy.

Důkaz. Z toho, že $z_1,\dots,z_n$ jsou báze plyne $x=\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$. Pro libovolné k: $\langle x,z_k\rangle=\langle\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i,z_k\rangle=\sum_{i=1}^n \alpha_i\langle z_i,z_k\rangle=\alpha_k\langle z_k,z_k\rangle=\alpha_k$. ⊞

Věta 5 (Gram-Schmidtova ortogonalizace)**.** Vstup: vektory $x_1,\dots,x_n\in V$ lineárně nezávislé.
Výstup: vektory $z_1,\dots,z_n \in V$ ortonormální, splňující $\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\}=\operatorname{span}\{z_1,\dots,z_n\}$.
For k=1 to n:
$y_k = x_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle x_k,z_i\rangle z_i$
$z_k=\frac{y_k}{\|y_k\|}$

Důkaz správnosti indukcí podle k: Pro $k=1$: triviálně $\|z_1\|=\|\frac{x_1}{\|x_1\|}\|=\sqrt{\langle\frac{x_1}{\|x_1\|},\frac{x_1}{\|x_1\|}\rangle}=\sqrt{=\frac{1}{\|x_1\|^2}\langle x_1,x_1\rangle}=\sqrt{=\frac{\|x_1\|^2}{\|x_1\|^2}}=1$.
2: IK: $k-1\to k$: Máme $z_1,\dots,z_{k-1}: \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_{k-1}\}=\operatorname{span}\{z_1,\dots,z_{k-1}\}$.
Pro převod $x_k \to z_k$. Ortonormalita: $\|z_k\|=1$ (stejně jako 1. IK). Také chci $\forall i\in[k-1]: \langle z_k,z_i\rangle=0$: $\langle z_k,z_i\rangle=\frac{1}{\|y_k\|}\langle y_k,z_i\rangle=\frac{1}{\|y_k\|}\langle x_k-\sum_{j=1}^{k-1}\langle x_k,z_j\rangle z_j,z_i\rangle=\frac{1}{\|y_k\|}(\langle x_k,z_i\rangle-\sum_{j=1}^{k-1}\langle x_k,z_j\rangle\langle z_j,z_i\rangle)=\frac{1}{\|y_k\|}(\langle x_k,z_i\rangle-\langle x_k,z_i\rangle)=0$. Poslední rovnost plyne z ortonormality a ortogonality.
Dále $\operatorname{span}\{z_1,\dots,z_{k-1},x_k\}\subseteq\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_{k-1},x_k\}$. U prvního lineárního podprostoru platí, že z_k je lineární kombinací těchto vektorů, tedy $\operatorname{span}\{z_1,\dots,z_k\}\subseteq\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_{k-1},x_k\}$. Ale všechny vektory jsou lineárně nezávislé, tedy oba prostory mají stejnou dimenzi k, tedy musí platit rovnost. ⊞

Důsledek 2 (Existence ortonormální báze)**.** Každý konečně generovaný prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi

Důsledek 3. Každý ortonormální systém vektorů v konečně generovaném prostoru se skalárním součinem lze rozšířit na ortonormální bázi.

Věta 6 (Besselova nerovnost a Parsevalova rovnost)**.** Nechť $z_1,\dots,z_n$ je ortonormální systém vektorů v V, $x\in V$. Pak

1. $\|x\|^2\geq\sum_{j=1}^n|\langle x,z_j\rangle|^2$
2. $\|x\|^2=\sum_{j=1}^n|\langle x,z_j\rangle|^2 \Leftrightarrow x\in\operatorname{span}\{z_1,\dots,z_n\}$.

Důkaz. 1. $0 \le \langle x - \sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle z_j, x - \sum_{j=1}^n, \langle x, z_j\rangle z_j\rangle = \langle x, x\rangle - \sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle \overline{\langle x, z_j\rangle} - \sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle \langle z_j, x\rangle + \sum_{j=1}^n \langle x, z_j\rangle \overline{\langle x, z_j\rangle} = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n |\langle x, z_j\rangle|^2$.

2. Rovnost nastane právě tehdy, když $x = \sum_{j=1}^n |\langle x, z_j\rangle|^2 \Leftrightarrow x \in \operatorname{span}\{z_1, \dots, z_n\}$.

⊞

Ortogonální doplněk

Definice 7 (Ortogonální doplněk)**.** Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $M \subseteq V$. Pak ortogonální doplněk M je $M^\perp = \{x \in V : \forall m \in M : \langle x, m\rangle = 0\}$.

Věta 7 (Vlastnosti ortogonálního doplňku množiny)**.** Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, $M, N \subseteq V$. Pak

1. $M^\perp$ je podprostor V.
2. $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$
3. $M^\perp = (\operatorname{span}(M))^\perp$

Důkaz. 1. Ukážeme uzavřenost na násobky skalárem a součty: $x \in M^\perp, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall m \in M : \langle m, x\rangle = 0 \Rightarrow \forall m \in M : \langle \alpha x, m\rangle = \alpha\langle x, m\rangle = 0$
$x, y \in M^\perp : \forall m \in M : \langle x, m\rangle = \langle y, m\rangle = 0, \langle x + y, m\rangle = \langle x, m\rangle + \langle y, m\rangle = 0 + 0 = 0$

2. $M \subseteq N, x \in N^\perp \Rightarrow \forall \langle x, n\rangle = 0$. Mějme $m \in M : \langle x, m\rangle = 0 \Rightarrow x \in M^\perp \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$

3. $M \subseteq \operatorname{span}(M) \Rightarrow (\operatorname{span}(M))^\perp \subseteq M^\perp$. Dále mějme $x \in M^\perp \Rightarrow \forall m \in M : \langle x, m\rangle = 0$. Mějme $x_1 \dots, x_n \in M$ tvořící bázi $\operatorname{span}(M)$. Každé y z lineárního obalu si tedy můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z M. Tedy $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \in (\operatorname{span})^\perp$.

⊞

Věta 8 (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)**.** Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, U je podprostorem V. Pak

1. Je-li $z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze U za $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ ortonormální báze V, potom $z_{m+1}, \dots, z_n$ je ortonormální báze $U^\perp$.
2. $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$
3. $U + U^\perp = V$
4. $(U^\perp)^\perp = U$
5. $U \cap U^\perp = \{o\}$

Důkaz. 1. $z_{m+1}, \dots, z_n$ je ortonormální systém v V. Stačí tedy ukázat $U^\perp = \operatorname{span}\{z_{m+1}, \dots, z_n\}$.
„$\subseteq$“: $x \in U^\perp \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \langle x, z_i\rangle z_i \overset{x \in U^\perp}{=} \sum_{i=m+1}^n \langle x, z_i\rangle z_i \in \operatorname{span}\{z_{m+1}, \dots, z_n\}$
„$\supseteq$“: $x \in \operatorname{span}\{z_{m+1}, \dots, z_n\} \Rightarrow x = \sum_{i=m+1}^n \langle x, z_i\rangle z_i = o + \sum_{i=m+1}^n \langle x, z_i\rangle z_i = \sum_{i=1}^m \langle x, z_i\rangle z_i + \sum_{i=m+1}^n \langle x, z_i\rangle z_i = \sum_{i=1}^n \langle x, z_i\rangle z_i$, zároveň vidíme $i = I, \dots, m \Rightarrow \langle x, z_i\rangle = 0$ - z jednoznačnosti souřadnic plyne $x \in U^\perp$.

2. Zřejmé z 1

3. Z 1:$x \in V : x = \sum_{i=1}^n \langle x, z_i\rangle z_i = \sum_{i=1}^m \langle x, z_i\rangle z_i + \sum_{i=m+1}^n \langle x, z_i\rangle z_i$. První sčítanec náleží U a druhý náleží $U^\perp$.

4. Zřejmé z 1.

5. Z předchozího a věty o dimenzi o spojení a průniku (ZS) plyne $\dim(U \cap U^\perp) = 0$.

⊞

Ortogonální projekce

Definice 8 (Ortogonální projekce)**.** Nechť V je vektorový prostor a U jeho podprostor. Pak projekcí vektoru $x \in V$ rozumíme takový vektor $x_U \in U$, který splňuje

$$\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|$$

Věta 9 (O ortogonální projekci)**.** Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, U je podprostorem V. Pak $\forall x \in V \exists! x_U \in U$, které je projekcí x do podprostoru U.
Navíc, je-li $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze U, pak

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i$$

Důkaz. Nechť $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ je rozšíření na ortonormální bázi V. Zadefinujme $x_U := \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i \in U$. Nyní $x - x_U = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i - \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \in U^\perp$.
Mějme libovolné $y \in U$. Pak $x - x_U \in U^\perp, x_U - y \in U$. Tedy $(x - x_U) \perp (x_U - y)$ - můžeme použít Pythagorovu větu:

$$\|x - y\|^2 = \|(x - x_U) + (x_U - y)\|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \|x - x_U\|^2 + \|x_U - y\|^2 \geq \|x - x_U\|^2$$

Z tohoto plyne minimalita. Jednoznačnost plyne z toho, že rovnost nastane je tehdy, když $\|x_U - y\| = 0 \Leftrightarrow x_U = y$. ⊞

Věta 10 (Gramova matice (!∂))**.** Nechť V je vektorový prostor na $\mathbb{R}$, $U \Subset V$, báze U je $w_1, \dots, w_m$. Označme jako Gramovu matici $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $G_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$.
Potom G je regulární a projekce $s = [x_U]_B$ vektoru x do U je řešení soustavy $Gs = (\langle w_1, x \rangle, \dots, \langle w_m, x \rangle)$.

Standardní skalární součin

Věta 11 (Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A)$

Důkaz. $x \in \mathcal{R}(A)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{R}(A) : \langle y, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : \langle A_{i*}, x \rangle = 0 \Leftrightarrow A_{i*}x = 0, i \in [n] \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A)$ ⊞

Důsledek 4. Je-li $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

1. $\mathrm{Ker}(A^T A) = \mathrm{Ker}(A)$
2. $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$
3. $\mathrm{rank}(A^T A) = \mathrm{rank}(A)$

Důkaz.
1. Je-li $x \in \mathrm{Ker}(A)$, pak $Ax = o$, tedy také $A^T A x = A^T o = o$, čímž $x \in \mathrm{Ker}(A^T A)$. Naopak, je-li $x \in \mathrm{Ker}(A^T A)$, pak $A^T A x = o$. Vynásobíme x^T : $x^T A^T A x = o$, tedy $x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \langle Ax, Ax \rangle \Rightarrow Ax = o \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(A)$.
2. Z 1 a věty o ortogonálním doplňku.
3. Plyne z 2 a definice hodnosti matice.

⊞

Věta 12 (Ortogonální projekce v $\mathbb{R}^m$)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n. Projekce $x \in \mathbb{R}^m$ do $\mathcal{S}(A)$ je $x' = A(A^T A)^{-1} A^T x$

Důkaz. Vidíme $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T) = n$. $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, navíc má hodnost n - tedy $A^T A$ je regulární. Dále $\mathcal{S}(A) = \{Ay : x \in \mathbb{R}^n\} \Rightarrow A \cdot ((A^T A)^{-1} A^T x) \in \mathcal{S}(A)$.
Chceme $x - x' \in \mathcal{S}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^T)^\perp = \mathrm{Ker}(A^T)$: $A^T(x - x') = A^T(x - A(A^T A)^{-1} A^T x) = A^T x - A^T A (A^T A)^{-1} A^T x = A^T x - A^T x = o$. ⊞

Věta 13 (Ortogonální projekce do doplňku)**.** Nechť $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matice projekce do podprostoru $V \Subset \mathbb{R}^n$. Pak $I - P$ je maticí projekce do $V^\perp$.

Důkaz. x má projekci $x_V \to x_V = Px$. Projekce do $V^\perp$ je $x - x_V = Ix - Px = (I-P)x$ ⊞

Věta 14 (Množina řešení metodou nejmenších čtverců)**.** Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak množina přibližných řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců je neprázdná a je rovna množině řešení normálních rovnic $A^TAx = A^Tb$.

Důkaz. Vlastně hledáme projekci b do $\mathcal{S}(a)$, přičemž tato projekce je vektor tvaru Axm kde $x \in \mathbb{R}^n$. Dále víme, že Ax je projekcí právě tehdy, když $Ax - b \in \mathcal{S}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^T)$. Jinými slov musí platit $A^T(Ax-b) = 0$, tedy $A^TAx = A^Tb$. Tato soustava má řešení, protože projekce musí existovat. ⊞

Důsledek 5. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice hodnosti n. Pak přibližné řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců je $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$, a je jednoznačné.

Ortogonální matice

Definice 9 (Ortogonální a unitární matice)**.** Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální, pokud $Q^TQ = I_n$. Matice $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je unitární, pokud $\overline{Q^T}Q = I_n$.

Věta 15 (Charakterizace ortogonálních matic)**.** Buď $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Q je ortogonální
2. Q je regulární a $Q^{-1} = Q^T$
3. $QQ^T = I_n$
4. Q^T je ortogonální
5. Q^{-1} existuje a je ortogonální
6. sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$
7. řádky Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$

Důkaz. 1-5: triviální
6,7: z rovnosti $Q^TQ = I$ dostáváme $\langle Q_{*i}, Q_{*j}\rangle = 1$ pokud $i = j$, $\langle Q_{*i}, Q_{*j}\rangle = 0$ pokud $i \neq j$. Tedy sloupce tvoří ortonormální systém. Dále řádky jsou sloupce Q^T, která je též ortogonální. ⊞

Tvrzení 3 (Součin ortogonálních matic)**.** Jsou-li $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální, pak Q_1Q_2 je ortogonální.

Důkaz. $(Q_1Q_2)^2Q_1Q_2 = Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2 = Q_2^TI_nQ_2 = Q_2^TQ_2 = I_n$. ⊞

Věta 16 (Vlastnosti ortogonálních matic)**.** Nechť $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální matice. Pak

1. $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\|Qx\| = \|x\| \forall x \in \mathbb{R}^n$
3. $|Q_{ij}| \leq 1, |Q^{-1}_{ij}| \leq 1$ pro každé $i, j \in [n]$
4. $\begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix}$ je ortogonální matice

Důkaz. 1: $\langle Qx, Qy\rangle = (Qx)^TQy = x^TQ^ty = x^TIy = x^Ty = \langle x, y\rangle$
2: $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx\rangle} \overset{(1)}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$.
3: Vzhledem k vlastnosti 6 z předchozí věty $\|Q_{*j}\| = 1$ pro $j \in [n]$. Tedy $1 = \|Q_{*j}\|^2 = \sum_{i=1}^n q_{ij}^2$, tedy $q_{ij}^2 \leq 1 \Rightarrow |q_{ij}| \leq 1$. Matice Q^{-1} je ortogonální, tedy tvrzení platí i pro ni.
4: Z definice $\begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q^TQ \end{pmatrix} = I_{n+1}$ ⊞

Věta 17 (Ortogonální matice a lineární zobrazení)**.** Nechť U, V jsou prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Dále nechť B_U resp. B_V je ortonormální báze U, resp. V. Pak matice zobrazení ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz. Podle vlastnosti matice zobrazení a tvrzení 8.26 (skripta): $\langle x, y\rangle = [x]_{B_U}^T \cdot [y]_{B_U}$, $\langle f(x), f(y)\rangle = [f(x)]_{B_V}^T \cdot [f(y)]_{B_V} = ({}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U})^T \cdot_{B_V} [f]_{B_U} \cdot [y]_{B_U}) = ([x]_{B_U}^T \cdot_{B_V} [f]_{B_U}^T \cdot_{B_V} [f]_{B_U} \cdot [y]_{B_U})$. Rovnost nastane, pokud matice zobrazení je ortogonální (první ekvivalence).
Naopak, pokud $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ platí pro každé $x, y \in U$, platí rovnost i pro vektory, jejichž souřadnice jsou jednotkové vektory. Pak mějme $[x]_{B_U} = e_i, [y]_{B_V} = e_j$, a proto

$$(I_n)_{ij} = e_i^T e_j = [x]_{B_U}^T \cdot [y]_{B_U} = \langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = [x]_{B_U}^T \cdot_{B_V} [f]_{B_U}^T \cdot_{B_V} [f]_{B_U} \cdot [y]_{B_U} =$$

$$= e_i^T \cdot B_V[f]_{B_U}^T \cdot_{B_V} [f]_{B_U} \cdot e_j = ({}_{B_V}[f]_{B_U}^T \cdot_{B_V} [f]_{B_U})_{ij}$$

Tím po složkách dostáváme $I_n =_{B_V} [f]_{B_U}^T \cdot_{B_V} [f]_{B_U}$. ⊞

Tvrzení 4 (Ortogonální matice a matice přechodu)**.** Nechť V je prostor nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a B_1, B_2 dvě jeho báze. Jakékoli dvě z následujících vlastností implikují tu třetí:

1. B_1 je ortonormální báze
2. B_2 je ortonormální báze
3. ${}_{B_2}[id]_{B_1}$ je ortogonální matice

Důkaz. Implikace „$1, 2 \Rightarrow 3$“: Plyne z předchozí věty, jelikož identita zachovává skalární součin.
Implikace „$2, 3 \Rightarrow 1$“: Nechť $B_1 = \{y_1, \ldots, x_n\}$. Z definice pak sloupce matice ${}_{B_2}[id]_{B_1}$ tvoří vektory $[x_i]_{B_2}$, které jsou (díky ortogonalitě matice přechodu) ortonormální při standardním skalárním součinu v $\mathbb{R}^n$. Podle tvrzení 8.26 (skripta) pak $\langle x_i, x_j\rangle = [x_i]_{B_2}^T [x_j]_{B_2}$, což je 0 pro $i = j$, 1 jinak.
Implikace „$1, 3 \Rightarrow 2$“: Platí z předchozího ze symetrie. ⊞

Determinanty

Definice 10 (Determinant)**.** Nechť $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$. Pak determinant A je $\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}$

Věta 18 (O determinantu transpozice)**.** Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$. Pak $\det(A^T) = \det(A)$.

Důkaz. $\det(A^T) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n (A^T)_{i,\pi(i)} \underset{\operatorname{sgn}(\pi)=\operatorname{sgn}(\pi^{<-1>})}{=} \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{<-1>}) \cdot \prod_{j=1}^n (A)_{j,\pi^{<-1>}(j)} = \det(A)$ ⊞

Věta 19 (Řádková linearita determinantu)**.** Nechť $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{T}^n, i \in [n]$. Pak $\det(A + e_i b^T) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*}))$

Důkaz. $\det(A+e_i b^T) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^n a_{j,\pi(j)} \cdot (a_{i,\pi(i)+b_{i,\pi(i)}}) \overset{\text{distributivita}}{=} \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot (\prod_{j=1}^n a_{j,\pi(j)} + b_{i,\pi(i)} \prod_{j=1, j\neq i}^n a_{j,\pi(j)}) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - a_{i*})$ ⊞

Poznámka (Determinant a elementární úpravy)**.**

1. Vynásobení řádku číslem $\alpha \in \mathbb{T} : \det(A^\alpha) = \alpha \det(A)$, kde A^α je matice s jedním řádkem vynásobeným α
2. Prohození dvou řádků ($i \neq j : A'$). $\det(A') = -\det(A)$
3. Přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému - determinant se nemění.

Důsledek 6 (Determinant matice se dvěma stejnými řádky)**.** Má-li matice dva stejné řádky, je její determinant 0.

Důsledek 7 (Nulovost determinantu)**.** $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(RREF(A)) = 0$, $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(RREF(A)) \neq 0 \Leftrightarrow RREF(A) = I \Leftrightarrow A$ je regulární.

Věta 20 (Kritérium regularity)**.** Matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový.

Důkaz. Plyne z důsledku. ⊞

Věta 21 (Multiplikativnost determinantu)**.** Pro každé $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ platí $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$.

Důkaz. Nejprve, ať je A matice elementární úpravy:

1. vynásobení řádku skalárem: funguje
2. prohození dvou řádků: funguje
3. přičtení α-násobku řádku k jinému: funguje

Je-li A regulární, pak $A = QI$, kde Q je součin matic elementárních úprav. Pak $\det(AB) = \det(QB) \overset{\text{indukce z matic}}{\underset{\text{elem. úprav}}{=}} \det(K_1)\ldots\det(B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
Je-li A singulární, pak AB je singulární, tedy $\det(AB) = 0\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B)$. ⊞

Důsledek 8. Je-li $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ regulární, pak $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Důkaz. $AA^{-1} = I$, z předchozí věty $\det(I) = 1 = \det(A)\cdot\det(A^{-1})$. ⊞

Věta 22 (Laplaceův rozvoj)**.** Nechť $A \in \mathbb{T}^{n\times n}, n \geq 2$. Pak $\forall i \in [n] : \det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot\det(A^{ij})$, kde $A^{ij} \in \mathbb{T}^{n-1\times n-1}$ vznikne vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Důkaz. Ať i-tý řádek je e_j^T. Pak si do prohodíme až dolů (jednotlivě, po řádcích) a doprava (jednotlivě, po sloupcích): $A' := \left(\begin{array}{ccc|c} & A^{ij} & & A_{*j} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right)$
Pak zjevně $\det(A) = (-1)^{n-i}\cdot(-1)^{n-j}\cdot\det(A^{ij}) = (-1)^{i+j}\cdot\det(A^{ij})$.
Nyní uvážíme obecný řádek a z řádkové linearity determinantu vidíme, že vše platí (TODO: pořádně rozepsat). ⊞

Věta 23 (Cramerovo pravidlo)**.** Nechť $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je regulární, $b \in \mathbb{T}^n$. Potom $Ax = b$ má řešení daná $x_i = \dfrac{\det(A + (b - A_{*i})e_i^T)}{\det(A)}, i \in [n]$.

Důkaz. $Ax = b \Leftrightarrow x_1A_{*1} + x_2A_{*2} + \ldots + x_nA_{*n} = b$
$\det(A+(B-A_{*i})e_i^T) = \det(A_{*1}|A_{*2}|\ldots|b|\ldots|A_{*n}) = \det(A_{*1}|A_{*2}|\ldots|\sum_{j=1}^{n}x_jA_{*j}|\ldots|A_{*n}) = \sum_{j=1}^{n}x_j\det(A_{*1}|A_{*2}|\ldots|A_{*j}$
$x_i\det(A_{*1}|A_{*2}|\ldots|A_{*i}|\ldots|A_{*n}) = x_i\det(A)$. ⊞

Definice 11 (Adjungovaná matice)**.** Buď $A \in \mathbb{T}^{n\times n}, n \geq 2$. Pak adjungovaná matice je $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{T}^{n\times n}$: $\mathrm{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j}det(A^{ji}), i, j \in [n]$.

Věta 24 (O adjungované matici)**.** Nechť $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$. Potom $A \times \mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$.

Důkaz. $(A\cdot\mathrm{adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\mathrm{adj}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-A)^{k+j}\cdot\det(A^{jk})$
Uvažme $i = j : (A\cdot\mathrm{adj}(A))_{ii} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-A)^{k+i}\cdot\det(A^{ik}) \overset{\text{Laplaceův}}{\underset{\text{rozvoj}}{=}} \det(A)$
Déle nechť $i \neq j : (A\cdot\mathrm{adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-A)^{k+j}\cdot\det(A^{jk}) = \pm\det(A^?) = 0$, v němž nahrazuji j-tý řádek i-tým (Laplaceův rozvoj dle j-tého řádku) - ta má ovšem dva stejné řádky, a tedy determinant je roven 0. ⊞

Důsledek 9. Je-li $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ regulární matice, pak $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot\mathrm{adj}(A)$.

Tvrzení 5 (Celočíselné matice)**.** Je-li $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, pak $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n} \Leftrightarrow \det(A) = \pm 1$

Důkaz. „$\Rightarrow$“: $A, A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n} \Rightarrow \det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z} \wedge \det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})} \Rightarrow \det(A) = \pm 1$.

„$\Leftarrow$“: $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}, \det(A) = \pm 1$, $A \in \mathbb{Z}^{n\times n} \Rightarrow \operatorname{adj}(A) \in \mathbb{Z}^{n\times n} \wedge \dfrac{1}{\det(A) = \pm 1 \Rightarrow A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}}$. ⊞

Definice 12 (Rovnoběžnostěn)**.** Rovnoběžnostěn je $\{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i, \alpha_i \in [0,1] \forall i \in [m]\}$, kde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ jsou LN vektory.

Věta 25 (Objem rovnoběžnostěnu)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Uvažme rovnoběžnostěn daný řádky A. Objem tohoto rovnoběžnostěnu je $\sqrt{\det(AA^T)}$, speciálně pro $m = n$ je objem roven $|\det(A)|$.

Důkaz matematickou indukcí podle počtu řádků (m). Báze: $m = 1 : \|a_1\| = \sqrt{a_1 a_1^T} = \sqrt{\det(a_1 a_1^T)} = \sqrt{\det(AA^T)}$

Indukční krok: $m-1 \to m$. D je matice prvních $m-1$ řádků, $a_m = b_m + c_m, b_m \in \mathcal{R}(D)^\perp, c_m \in \mathcal{R}(D)$. Mějme $A = (D, a_n)^T, A' = (D, b_n)^T$. Je možné $A = E_1 \dots E_k A'$, kde E_i jsou matice elementárních úprav přičtení jednoho řádku k jinému, tedy jejich determinanty jsou 1. Pak $\det(AA^T) = \det(A'A'^T), A'A'^T = \begin{pmatrix} D \\ b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \cdot D^T & o \\ o^T & b_m b_m^T \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A'A'^T) = \det(D \cdot D^T) \cdot \|b_m\|^2 \Rightarrow \sqrt{\det(A'A'^T)} = \sqrt{\det(D \cdot D^T)} \cdot \|b_m\|$ ⊞

Vlastní čísla

Definice 13 (Vlastní číslo)**.** Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo A a $x \in \mathbb{C}^n$ je příslušný vlastní vektor, pokud $x \neq o \wedge Ax = \lambda x$.

Věta 26 (Charakterizace vlastních čísel)**.** Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak λ je vlastní číslo $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$. Dále $o \neq x \in \mathbb{C}^n$ je vlastní vektor příslušející k $\lambda \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

Důkaz. Mějme $Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda I_n x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_n)x = 0$. Takový vektor existuje, když $A - \lambda I_n$ je singulární, tedy její determinant je nulový. Pak vlastní vektor je řešením a tedy patří do jádra. ⊞

Definice 14 (Charakteristický polynom)**.** Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je charakteristický polynom s proměnnou λ $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Věta 27 (Vlastní čísla a charakteristický polynom)**.** Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má její charakteristický polynom stupeň n a tedy má v $\mathbb{C}$ n kořenů (počítáno s násobnými).

Důkaz. Plyne z rozboru a základní věty algebry. ⊞

Věta 28 (Vlastní číslo dosazené do charakteristického polynomu)**.** Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo právě tehdy, když $p_A(\lambda) = 0$.

Důkaz. Plyne z definice. ⊞

Definice 15 (Násobnost aritmetické a geometrická)**.** Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pak jeho algebraická násobnost je násobnost λ jako kořene charakteristického polynomu a geometrická násobnost je počet lineárně nezávislých vlastních vrcholů příslušných k λ (tedy $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n))$).

Definice 16 (Stopa, spektrum a spektrální poloměr)**.** Stopa matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je $\operatorname{trace}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Spektrum matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ je $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ - tedy množina vlastních čísel.
Spektrální poloměr $\rho(A) = \max\limits_{\lambda_i \text{ vl. č. } A} |\lambda_i|$.

Věta 29 (Součin a součet vlastních čísel)**.** Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ včetně algebraické násobnosti. Pak

1. $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$

2. $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Důkaz. $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)(-1)^n$. Pro $\lambda = 0 : det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
Hledáme koeficient u λ^{n-1}. Z pravé strany: $(-1)^n(-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n)\cdot\lambda^{n-1} \to (-1)^{n+1}(\lambda_1 + \lambda_2 - + ldots + \lambda_n)$, z levé strany $(a_{11} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) \to (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})$. ⊞

Věta 30 (Vlastnosti vlastních čísel)**.** Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a odpovídajícími vlastními vektory $x_1, \dots, x_n$. Pak

1. A je regulární $\Leftrightarrow$ 0 není vlastní číslo.
2. Je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ s odpovídajícími vlastními vektory $x_1, \dots, x_n$.
3. A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ s odpovídajícími vlastními vektory $x_1, \dots, x_n$.
4. Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ má αA vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ s odpovídajícími vlastními vektory $x_1, \dots, x_n$.
5. Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ má $A + \alpha I_n$ vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ s odpovídajícími vlastními vektory $x_1, \dots, x_n$.
6. A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Důkaz. Stačí rozepsat. ⊞

Věta 31 (Vlastní číslo komplexně sdružené)**.** Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a λ je její vlastní číslo, pak $\overline{\lambda}$ je také vlastní číslo A.

Důkaz. Rozepsat na $p_A(\lambda) = p_A(\overline{\lambda})$ ⊞

Definice 17 (Matice společnice)**.** Mějme polynom nad $\mathbb{C}$ $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Pak matice společnice je

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Věta 32 (O matici společnici)**.** Je-li p polynom n-tého stupně nad $\mathbb{R}$ a koeficient u x^n je 1, pak $P_{C(P)}(\lambda) = (-1)^n p(\lambda)$

Důkaz. Rozepsat determinant $det(C(p) - \lambda I)$. ⊞

Věta 33 (Cayley - Hamilton)**.** Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$. Potom $(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n$.

Důkaz. $(A - \lambda I_n)\cdot\text{adj}(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)I_n$. Prvky adjungované matice jsou polynomy stupně nejvýše $n - 1 \Rightarrow \text{adj}(A - \lambda I) = \lambda^{n-1}B_{n-1} + \dots + \lambda B_1 + B_0 = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)I_n$. ⊞

Důsledek 10.

1. $\forall k \in \mathbb{N} : A^k \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.
2. Je-li A regulární, pak $A^{-1} \in \text{span}\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.

Důkaz. Stačí rozepsat. ⊞

Definice 18 (Podobnost)**.** Matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou podobné, pokud $\exists$ regulární $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ t.ž. $A = SBS^{-1}$.

Věta 34 (Vlastní čísla podobných matic)**.** Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou podobné. Potom mají stejná vlastní čísla.

Důkaz. Rozepsat charakteristické polynomy. ⊞

Definice 19 (Diagonalizovatelnost)**.** Matice A je diagonalizovatelná, je-li podobná nějaké diagonální matici.

Věta 35 (Charakterizace diagonalizovatelnosti)**.** Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ A má n lineárně nezávislých vektorů.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: $A = S\Lambda S^{-1} \Rightarrow AS = S\Lambda$. Porovnáme sloupce: $(AS)_{*j} = A \cdot S_{*j}, (S\Lambda)_{*j} = S\Lambda_{*j} = \lambda_j \cdot S \cdot e_j = \lambda_j S_{*j} \Rightarrow A \cdot S_{*j} = \lambda_j \cdot S_{*j} \Rightarrow S_{*j}$ je vlastní vektor k λ_j. Tedy sloupce S jsou vlastní vektory A, navíc S je regulární, tedy sloupce jsou lineárně nezávislé, tedy dokonce tvoří bázi sloupcového prostoru.
„$\Leftarrow$“: Mějme n lineárně nezávislých vektorů $s_1, \ldots, s_n$ odpovídajících vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pak $\lambda_j s_j = As_j = (AS)_{*j} = (S\Lambda)_{*j}$ pro S, Λ zvolené jako v druhé implikaci. Z lineární nezávislosti sloupců - S je regulární, tedy existuje její inverzní matice, tedy $A = S\Lambda S^{-1}$ $\boxplus$

Věta 36 (Vlastní vektory různých vlastních čísel)**.** Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $x_1, \ldots, x_k$ příslušné vlastní vektory. Pak $x_1, \ldots, x_k$ jsou lineárně nezávislé.

Indukcí a sporem. Báze: $x_1 \neq 0$ zjevně lineárně nezávislý.
$k-1 \to k$. Ať umíme vytvořit lineární kombinaci, která se zobrazí na o. Pak $A(\sum \alpha_i x_i) = o = \sum \alpha_i \lambda_i x_i (= Ao)$, také $\sum \alpha_i x_i \lambda_k = o$. Tyto rovnosti odečteme a máme $\sum \alpha_i(\lambda_i - \lambda_k)x_i = o$, z IP jsou koeficienty rovny nule. $\boxplus$

Důsledek 11. Má-li matice A všechna vlastní čísla navzájem různá, je diagonalizovatelná.

Věta 37 (Vlastní čísla součinu komutují)**.** Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak AB a BA mají stejná vlastní čísla včetně algebraických násobností.

Důkaz. Ukážeme, že matice $X = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ a $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ si jsou podobné. Pak $X = SYS^{-1} \Rightarrow XS = SY$, volíme $S = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Pak stačí ověřit, že $XY = SY$. $\boxplus$

Definice 20 (Jordanova buňka, normální forma)**.** Nechť $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}^+$ Pak Jordanova buňka je matice $k \times k$:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

. Dále matice $J \in \mathbb{C}^{n\times n} : n = \sum_{i=1}^{l} k_i$ je v Jordanově normální formě, pokud J je bloková matice

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}$$

Věta 38 (Podobnost Jordanově normální formě (bez dk))**.** Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná nějaké matici v Jordanově normální formě. Až na pořadí Jordanových buněk je pak Jordanova normální forma určena jednoznačně. Dále algebraická násobnost vlastního čísla λ je součet velikostí Jordanových buněk příslušejících λ.

Definice 21 (Hermitovskost a hermitovská transpozice)**.** Jestliže $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pak její hermitovská transpozice $A^* = \overline{A}^T$.
Matice je hermitovská, jestliže $A = A^*$.

Věta 39 (Vlastní čísla symetrických matic)**.** Vlastní čísla reálných symetrických (nebo komplexních hermitovských) matic jsou reálná.

Důkaz. Mějme $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo, $\|x\| = 1$ příslušný vlastní vektor. Pak $Ax = \lambda x : \lambda = \lambda x^*\lambda = x^*\lambda x = x^*Ax = x^*A^*x = (x^*Ax)^* = \lambda^* \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ ⊞

Věta 40 (Spektrální rozklad symetrických matic)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Pak $\exists Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální a $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonální takové, že $A = Q\Lambda Q^T$.

Důkaz indukcí podle n. Báze: $\Lambda = A, Q = (1)$.
IK: $n-1 \to n$: mějme $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrickou s reálným vlastním číslem $\lambda \in \mathbb{R}$ a vlastním vektorem x příslušejícím λ : $\|x\| = 1$. Zvolme x jako první sloupec S a do dalších zvolíme prozatím doplnění x na ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Pak $Ax = \lambda Ix \Rightarrow (A-\lambda I)x = o \Rightarrow (A-\lambda I)S = (0|?)$ - matice s nulami v prvním sloupci a něčím dále. Pak $S^T(A-\lambda I)S = S^T(0|?) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ - zadefinujeme A' jako zbytek. Ale $A' \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$, tedy ji můžeme z IP rozepsat jako $A' = Q'\Lambda' Q'^T$. Když si přidáme $R = \begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q' \end{pmatrix}$, $\Lambda'' = \begin{pmatrix} 0 & o^T \\ o & \Lambda' \end{pmatrix}$. Pak $S^T(A-\lambda I)S = R\Lambda'' R^T \Rightarrow A = SR\Lambda''(SR)^T + \lambda I \Rightarrow SR(\Lambda''+\lambda I)(SR)^T \stackrel{\text{def}}{=} Q\Lambda Q^T$. ⊞

Věta 41 (Courant-Fischer)**.** Nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla čtvercové symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak $\lambda_1 = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_2=1}(x^TAx)$, $\lambda_1 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_2=1}(x^TAx)$.

Důkaz. Pouze pro λ_1:
„$\leq$“: $\lambda_1 = x_1^TAx_1 \leq \max_{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1} x^TAx$.
„$\geq$“: libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| = 1, A = Q\Lambda Q^T, y = Q^Tx \Rightarrow \|y\| = 1$. Pak $x^TAx = x^TQ\Lambda Q^Tx = (Q^Tx)^T\Lambda(Q^Tx) = y^T\Lambda y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_1 y_i^2 = \lambda_1\|y\|^2 = \lambda_1$ ⊞

Věta 42 (Perronova, bez dk)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je nezáporná matice (tj. $a_{ij} \geq 0 \,\forall i,j \in [n]$). Pak největší (dokonce největší v absolutní hodnotě) vlastní číslo je reálné a nezáporné, a příslušný vlastní vektor je nezáporný ve všech složkách.

Věta 43 (Gerschgorinovy disky)**.** Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak vlastní číslo λ leží v kruhu se středem a_{ii}, poloměrem $\sum\limits_{i\neq j} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in [n]$.

Důkaz. Mějme λ vl. číslo, x vl. vektor: $Ax = \lambda x$, mějme i takové, že $|x_i|$ je největší v absolutní hodnotě. Protože i-tá rovnice má tvar $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i \Rightarrow \lambda = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}$, tedy $|\lambda - a_{ii}| = |\sum\limits_{i\neq j} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}| \leq \sum\limits_{i\neq j} |a_{ij}||\frac{x_j}{x_i}| \leq \sum\limits_{i\neq j} |a_{ij}|$ ⊞

Tvrzení 6 (Mocninná metoda výpočtu vlastního čísla a její konvergence)**.** Algoritmus: Mějme $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zvol $x_O \neq o, x_0 \in \mathbb{C}^n, i = 1, \|x_0\| = 1$.
Opakuj $y_i := Ax_{i-1}, x_i = \frac{1}{\|y_i\|}y_i, i++$.
Vrať $\lambda_1 = x_{i-1}^Ty_i, v_1 = x_i$.
Pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ její vlastní čísla a $v_1, \ldots, v_n$ lineárně nezávislé vlastní vektory s $|v_i| = 1 \forall i \in [n]$. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$ má nenulovou složku ve směru v_1. Pak x_I konverguje k v_1 nebo $-v_1$ a $x_{i-1}^Ty_i$ konverguje k λ_1.

Důkaz. $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \alpha_1 \neq 0$, $x_k = \frac{1}{\|A^kx_0\|}A^kx_0$, $A^kx_0 = A^k\sum i = 1^n\alpha_i v_i = \sum \alpha_i A^k v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda_i^k v_i = \lambda_1^k(\alpha_1 v_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} v_i \to \alpha_1\lambda_1^k v_1 \Rightarrow x_k \to v_i, x_{i-1}^Ty_i = x_{i-1}^TAx_{i-1} \to x_1^TAv_1 = \lambda_1$. ⊞

Věta 44 (O deflaci vlastního čísla)**.** Jestliže $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla, $v_1, \ldots, v_n$ jsou její odpovídající vrcholy (a tedy ortonormální báze). Pak $A - \lambda_1 v_A v_1^T$ má vlastní číslo $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a stejné vlastní vektory.

Důkaz. $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^T \Rightarrow A - \lambda_+ v_1 v_1^T = \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i v_i v_i^T + 0 \cdot v_1 v_1^T$ ⊞

Pozitivně (semi)definitní matice

Definice 22 (Pozitivní (semi)definitnost)**.** f Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Pak A je pozitivně semidefinitní, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax \geq 0$. Dále A je pozitivně definitní, pokud $\forall x \neq o \in \mathbb{R}^n : x^T Ax > 0$.

Věta 45 (Vlastnosti pozitivně semidefinitních matic)**.**

1. $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické, pozitivně definitní $\Rightarrow A + B$ pozitivně definitní
2. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická, pozitivně definitní, $\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0 \Rightarrow \alpha A$ pozitivně definitní
3. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická, pozitivně definitní $\Rightarrow A^{-1}$ pozitivně definitní

Důkaz. 1, 2 rozepsat
3: A je pozitivně definitní, tedy regulární, tedy má dobře definovanou inverzní matici. Pak pro $x \neq o$: $x^T A^{-1}x = x^T A^{-1}Ix = x^T A^{-1}AA^{-1}x \overset{y=A^{-1}x}{=} y^T Ay > 0$. ⊞

Věta 46 (Charakterizace pozitivní definitnosti)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. A je pozitivně definitní
2. Všechna vlastní čísla A jsou kladná
3. $\exists U \in \mathbb{R}^{m\times n} : \operatorname{rank}(U) = n$ a $A = U^T U$.

Důkaz. „$1 \Rightarrow 2$“: sporem - nechť $\lambda \leq 0$ je vlastní číslo A, x je příslušný vektor - pak $Ax = \lambda x \Rightarrow x^T Ax = x^T \lambda x \leq 0 \Rightarrow\lightning$
„$2 \Rightarrow 3$“: A je symetrické, tedy je diagonalizovatelná: $A = Q\lambda Q^T$. Mějme $\Lambda' : \lambda'_{ii} = \sqrt{\lambda_i} > 0$, tedy dobře definované. Pak $A = Q\lambda Q^T = Q\Lambda'\Lambda' Q^T \overset{U=\Lambda Q^T}{=} U^T U$. Q^T je regulární, tedy sloupce U jsou nezávislé, tedy $\operatorname{rank}(U) = n$.
„$3 \Rightarrow 1$“: $A = U^T U$. Pro $x \neq o : x^T Ax = x^T U^T UX = (Ux)^T(Ux) = \|Ux\|^2 \geq 0$, rovnost nastane jen když $Ux = 0$ - a jelikož máme $\operatorname{rank}(U) = n$, je to jen tehdy, když $x = 0$. ⊞

Věta 47 (Rekurzivní vyjádření pozitivně definitní matice)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times}n$ je symetrická ve tvaru $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \overline{A} \end{pmatrix}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^{n-1}, \overline{A} \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$.
Pak A je pozitivně definitní $\Leftrightarrow \alpha \geq 0$ a $(\overline{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T)$ je pozitivně definitní.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: $x^T Ax > 0, x \neq o$. Pak $x = e_1 e_1^T Ae_1 = a_{11} = \alpha \geq 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, x \neq o : \overline{x}^T(\overline{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T)\overline{x} = \overline{x}^T\overline{A}\overline{x} - \overline{x}^T aa^T\overline{x} \cdot \frac{1}{\alpha} = \overline{x^T}\overline{A}\overline{x} - \frac{1}{\alpha}(a^T\overline{x})^2 = (\frac{1}{\alpha} - a^T\overline{x}, \overline{x}) \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \overline{A} \end{pmatrix} (\frac{1}{\alpha} - a^T\overline{x}, \overline{x})^T > 0$
„$\Leftarrow$“: Mějme $x = (\beta, \overline{x})^T \in \mathbb{R}^n$. Pak $x^T Ax = (\beta, \overline{x}) \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \overline{A} \end{pmatrix} (\beta, \overline{x})^T = \alpha\beta^2 + 2\beta a^T\overline{x} + \overline{x}^T\overline{A}\overline{x} = \overline{x}^T(\overline{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T)\overline{x} + (\sqrt{\alpha}\beta + \frac{1}{\sqrt{\alpha}a^T\overline{x}})^2 \geq 0$, rovnost nastane jen tehdy, když $x = o$ - rozepsat. ⊞

Věta 48 (Choleského rozklad)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně semidefinitní. Pak $\exists! L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dolní trojúhelníková s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$.

Důkaz indukcí podle n. Báze: $n = 1 : (\alpha) = (\sqrt{\alpha})(\sqrt{\alpha})$
IK: $n - 1 \to n : A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \overline{A} \end{pmatrix}$, z IP: $(\overline{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T) = \overline{L}\overline{L}^T$. Pak mějme $L = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & o^T \\ \frac{1}{\alpha}a & \overline{L} \end{pmatrix}$. Výpočtem ověříme - máme existenci, nyní ještě jednoznačnost. Mějme druhý rozklad $L' = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & o^T \\ \frac{1}{\beta}b & \overline{L'} \end{pmatrix}$ Pak ovšem $\beta = \sqrt{\alpha}, b = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \overline{A} = bb^T + \overline{L'}\overline{L'}^T \Rightarrow \overline{L'}\overline{L'}^T = \overline{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$, to je ovšem z IP jednoznačné, tedy $\overline{L} = \overline{L'} \Rightarrow L = L'$. ⊞

Věta 49 (Gaussova eliminace a pozitivní definitnost)**.** Symetrická $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně definitní $\Leftrightarrow A$ lze převést na matici v REF s kladnou diagonálou za použití operací „přičtení násobku řádku s pivotem k řádku pod ním“.

Věta 50 (Sylvestrovo kritérium)**.** Symetrická $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když determinanty hlavních vedoucích matic $A_1, A_2, \ldots A_n$ jsou kladné. A_i vznikne z A vyškrtnutím řádků a sloupců s indexy $> i$.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: A je pozitivně definitní, tedy i její podmatice jsou pozitivně definitní, dále $\det(A_i) = \prod_{j=1}^{i} \lambda_j > 0$, kde λ_l jsou vlastní čísla.
„$\Leftarrow$“: Převedeme A do REF pomocí předchozí věty. Pak $\det(A_i) = \det(A_i') = \prod_{j=1}^{i} a'_{jj}$. A protože z kladnosti determinantů plyne $a_{ii} > 0 \forall i \in [n]$, má A nutně všechna vlastní čísla kladná, tedy je pozitivně definitní. ⊞

Věta 51 (Skalární součin a pozitivní definitnost)**.** V $\mathbb{R}^n$ mějme operaci $\langle x, y\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tato operace je skalární součin právě tehdy, když $\exists A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická, pozitivně definitní taková, že $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = x^T Ay$.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Mějme $\langle x, y\rangle$ skalární součin. Pak $\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle$. To pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n} : a_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ je $x^T Ay$. Tato matice je zjevně symetrická, a jelikož $\forall x \neq o \in V : \langle x, x\rangle = x^T Ax > 0$, je i pozitivně definitní.
„$\Leftarrow$“: stačí ověřit axiomy:

1. $\forall x \neq o \in V : \langle x, x\rangle = x^T Ax > 0\,, x = o \Rightarrow \langle x, x\rangle = x^T Ax = 0$ ✓
2. Linearita - maticové násobení linearitu zachovává ✓
3. $\langle x, y\rangle = x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x^{T^T} = y^T Ax = \langle y, x\rangle$.

⊞

Tvrzení 7 (O odmocnině z matice)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně (semi)definitní. Pak $\exists B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivně (semi)definitní taková, že $B^2 = A$.

Důkaz. A je symetrická, tedy $A = Q\Lambda Q^T$: Q je ortogonální, Λ je diagonální s celými čísly A na diagonále. Protože A je pozitivně (semi)definitní, jsou její vlastní čísla kladná (nezáporná). Odmocnina diagonální matice se všemi prvky kladnými (nezápornými) je pak triviální: odmocníme všechny prvky na diagonále. Tak si zadefinujeme Λ'.
Mějme pak $A = Q\Lambda Q^T = Q\Lambda'\Lambda' Q^T = Q\Lambda' Q^T Q\Lambda' Q^T = BB = B^2$, tedy jsme naši matici nalezli. Zároveň je též zjevně pozitivně (semi)definitní. ⊞

Bilineární a kvadratické formy

Definice 23 (Bilineární (symetrická) forma, kvadratická forma)**.** Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak bilineární forma je $b : V^2 \to \mathbb{T}$ splňující $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}, u, v, w \in V : b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w), b(w, \alpha u + \beta v) = \alpha b(w, u) + \beta b(w, v)$.
Bilineární forma b je symetrická, pokud $\forall u, v \in V : b(u, v) = b(v, u)$.
Kvadratická forma je $f : V \to \mathbb{T}$ splňující $f(v) = b(v, v)$ pro nějakou symetrickou bilineární formu b.

Definice 24 (Matice bilineární a kvadratické formy)**.** Buď $b : V^2 \to \mathbb{T}$ bilineární forma, $B = (w_1, \ldots, w_n)$ báze V. Pak definujeme $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ jako matici bilineární formy b vzhledem k bázi B předpisem $a_{ij} = b(w_i, w_j)$. Matice kvadratické formy je matice odpovídající bilineární symetrické formy.

Věta 52 (Maticové vyjádření forem)**.** Buď $B = (w_1, \ldots, w_n)$ báze V, b bilineární forma na V. Pak $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je maticí bilineární formy vzhledem k bázi $B \Leftrightarrow \forall u, v \in V : b(u, v) = [u]_B^T A[v]_B$.

Důkaz. Označme $[u]_B = x = (x_1, \ldots, x_n)^T, [v]_B = y = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Pak $b(u, v) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i, \sum_{j=1}^{n} y_j w_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(w_i, w_j)$

Z druhé strany: $[u]_B^T A[v]_B = x^T Ay = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$.
Tyto dva výrazy se rovnají $\Leftrightarrow b(w_i, w_j) = a_{ij} \Leftrightarrow A$ je matice bilineární formy. ⊞

Důsledek 12. Nechť $B = (w_1, \ldots, w_n)$ je báze V nad $\mathbb{T}$, $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$. Potom $\exists! b$ bilineární forma na V taková, že A je maticí b vzhledem k B.

Důsledek 13. Každá bilineární forma na $\mathbb{R}^n$ se dá vyjádřit ve tvaru $b(x,y) = x^T Ay$ pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Každá kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ se dá vyjádřit ve tvaru $f(x) = x^T Ax$ pro nějakou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Věta 53 (Matice kvadratické formy při změně báze)**.** Nechť $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je matice kvadratické formy f vzhledem k bázi B a B' je jiná báze, $S = {}_B[id]_{B'}$ matice přechodu. Pak matice f vzhledem k B' je $S^T AS$.

Důkaz. $b(u,v) = [u]_B^T A[v]_b = [u]_{B'} S^T AS[u]_{B'} =$ ⊞

Věta 54 (Sylvestrův zákon setrvačnosti)**.** Buď $f(x) = x^T Ax$ kvadratická forma (tj. A je symetrická). Potom $\exists$ báze vůči níž má matice f diagonální tvar s prvky $0, \pm 1$. Navíc je počet $1, -1$ určen jednoznačně.

Důkaz. Existence: A je symetrická, tedy $\exists\, Q$ ortogonální, Λ diagonální : $A = Q\Lambda Q^T$. Také $\Lambda = Q^T AQ$ s vlastními čísly na diagonále. Pak uvažme diagonální $\Lambda' : \lambda'_{ii} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{ii}|}}$. Pak $\Lambda'\Lambda\Lambda'$ je matice s $0, \pm 1$ na diagonále. Tedy $\Lambda' Q^T AQ\Lambda' = (Q\Lambda')^T A(Q\Lambda')$, tedy jsme našli hledanou matici přechodu.
Jednoznačnost ukážeme sporem. Nechť D, D' jsou diagonální s prvky $0, \pm 1$, mají odpovídající báze $B = \{w_1, \ldots, w_n\}, B' = \{w'_1, \ldots, w'_n\}$. Označme $[u]_B = y, [u]_{B'} = z$. Dále bez újmy na obecnosti $f(u) = y^T Dy = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_q^2 + 0y_{q+1}^2 + \ldots + 0y_n^2, f(w) = z^T Dz = z_1^2 + \ldots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \ldots - z_t^2 + 0z_{t+1}^2 + \ldots + 0z_n^2$. $D' = S^T DS, S = {}_B[id]_{B'} \Rightarrow S$ je regulární, tedy $\mathrm{rank}(D') = \mathrm{rank}(D) \Rightarrow q = t$. Pro spor dále $p \neq s$, bez újmy na obecnosti nechť $p > s : P = \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_p\}, R = \mathrm{span}\{w'_{s+1}, \ldots, w'_t\}, \dim(B) = p, \dim(R) = t - s$. Z věty o dimenzi průniku a sjednocení: $\dim(P \cap R) = p + t - s - \dim(P + R) \geq p + t - s - t = p - s > 0$. Tedy $\exists u \in P \cap R : u \neq o \wedge 0 > -z_{s+1}^2 - \ldots - z_t^2 = f(u) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 > 0 \Rightarrow \lightning$ ⊞

Důsledek 14. Je-li A symetrická převedena $S^T AS$ na diagonální tvar s $0, \pm 1$, pak počty 1 určují počet kladných vlastních čísel, počty -1 počet záporných vlastních čísel.

Důsledek 15. Je-li A symetrická převedena $S^T AS$ na diagonální tvar s $0, \pm 1$, pak A je pozitivně definitní, právě když $S^T AS$ má kladnou diagonálu a semidefinitní právě když má nezápornou diagonálu.

Definice 25 (Signatura kvadratické formy)**.** Signatura kvadratické formy je (#1, #-1, #0).

Definice 26 (Matice Householderovy transformace)**.** Nechť $x \in \mathbb{R}^n, x \neq o$. Pak $H(x) = I_n - \frac{2}{x^T x} xx^T$

Věta 55 (Householderova transformace)**.** Buď $x, y \in \mathbb{R}^n : x \neq y, \|x\|_2 = \|y\|_2$. Pak $y = H(x-y) \cdot x$.

Důkaz. $H(x-y)x = (I_n - \frac{2}{(x-y)^T(x-y)} \cdot (x-y)(x-y)^T)x = x - \frac{2(x-y)(x-y)^T x}{(x-y)^T(x-y)} = x - \frac{2(x-y)^T x}{(x-y)^T(x-y)}(x-y) = x - \frac{2\|x\|_2^2 - 2y^T x}{\|x-y\|_2^2}(x-y) \overset{\|x\|=\|y\|}{=} x - \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2y^T x}{\|x-y\|_2^2}(x-y) = x - \frac{\|x-y\|_2^2}{\|x-y\|_2^2}(x-y) = x - (x-y) = y$. ⊞

Důsledek 16. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$. Definujme $H = H(x - \|x\|_2 e_i)$, je-li $x \neq \|x\|_2 e_i$, $H = I_n$ jinak. Potom $Hx = \|x\|_2 e_i$.

Seznam témat