Poznámky - lineární programování a kombinatorická optimalizace

Petr Chmel, LS 2018/19

Definice 1 (Lineární program v kanonickém tvaru)**.** Lineární program v kanonickém tvaru je optimalizační úloha daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ s cílem maximalizace $c^T x$ pro $x \in \mathbb{R}^n$ za podmínky $Ax \leq b$.

Definice 2 (Lineární program v rovnicovém tvaru)**.** Lineární program v rovnicovém tvaru je optimalizační úloha daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ s cílem maximalizace $c^T x$ pro $x \in [0, +\infty)^n$ za podmínky $Ax = b$.

Poznámka (Účelová funkce, přípustné a optimální řešení)**.** $c^T x$ nazýváme účelovou funkcí.
Přípustné řešení je $x \in \mathbb{R}^n$ splňující všechna omezení.
Optimální řešení je přípustné řešení, v němž účelová funkce nabývá maxima.

Definice 3 (Celočíselný lineární program)**.** Celočíselný lineární program je optimalizační úloha daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektory $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ s cílem maximalizace $c^T x$ pro $x \in \mathbb{Z}^n$ za podmínky $Ax \leq b$.

Definice 4 (Binární lineární program)**.** Binární lineární program je celočíselný lineární program s $x \in \{0, 1\}^n$.

Definice 5 (Smíšený celočíselný program)**.** Smíšený celočíselný program je lineární program, který má některé proměnné celočíselné a ostatní reálné.

Definice 6 (Afinní prostor, jeho dimenze)**.** Afinní prostor je $L \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že $L = x + V$ pro $x \in \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorový podprostor.
Dimenze L je $\dim(V)$.

Definice 7 (Afinní obal)**.** Afinní obal množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je $Y = \bigcap L : L$ je afinní prostor a $X \subseteq L$.

Definice 8 (Afinní kombinace)**.** Afinní kombinace bodů $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ je libovolný bod nebo výraz $\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k$ pro $\alpha_i \in \mathbb{R}, \sum \alpha_i = 1$.

Věta 1 (O afinním obalu a afinní kombinaci)**.** Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak afinní obal X je roven $Y = \{\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k : k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum \alpha_i = 1, x_i \in X\}$.

Definice 9 (Afinní nezávislost)**.** Řekneme, že body $x_0, \ldots, x_k$ jsou afinně nezávislé, pokud $\forall \alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} : (\sum \alpha_i = 0 \land \sum \alpha_i x_i = o) \Rightarrow \alpha_0 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Definice 10 (Dimenze množiny)**.** Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ označíme dimenzi X jako dimenzi afinního obalu X.

Definice 11 (Konvexní množina)**.** Řekneme, že $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, jestliže $\forall x, y \in X : \forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in X$.

Definice 12 (Konvexní obal)**.** Konvexní obal X je $\operatorname{conv}(X) := \bigcap \{C : C \subseteq \mathbb{R}^n, X \subseteq C, C \text{ konvexní}\}$.

Definice 13 (Konvexní kombinace)**.** Konvexní kombinace bodů $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ je $\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k$ pro $\alpha_i \in \mathbb{R}_0^+, \sum \alpha_i = 1$.

Věta 2 (O konvexním obalu a konvexní kombinaci)**.** Buď $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak $\operatorname{conv}(X) = \{\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k : k \in \mathbb{N}, x_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$.

Důkaz. Zjevně Y je konvexní, tedy $\operatorname{conv}(X) \subseteq Y$.
Opačně uvážíme $y \in Y$. Víme, že $y \in C \, \forall C$ konvexní a $C \supseteq X$. Tedy $Y \subseteq \operatorname{conv}(X)$. ⊞

Věta 3 (O konvexním obalu s dimenzí)**.** Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n, \dim(X) = d$. Pak $\operatorname{conv}(X) = \{\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_d x_d : x_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$.

Důkaz sporem. Buď $y \in \operatorname{conv}(X), y = \alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k$ tak, že k je minimální.
Pro spor předpokládejme, že $k > d$. Pak jsou ovšem $\alpha_0 x_0, \ldots, \alpha_k x_k$ afinně závislé, tedy existují $\beta_i \in \mathbb{R}$: takové, že $\beta_0 x_0 + \ldots + \beta_k x_k = 0 \wedge \sum \beta_i = 0 \wedge \exists i : \beta_i \neq 0$. Tedy β_i jsou kladná i záporná. Uvažme γ maximální takové, že $\forall i : \gamma\beta_i + \alpha_i \geq 0$. Takové číslo existuje, jelikož množina řešení je neprázdná ($\gamma = 0$ splňuje), omezená (některá β_i jsou záporná), a uzavřená (z neostrých nerovností).
Uvažme kombinaci $\sum(\gamma\beta_i + \alpha_i)a_i = x$. Tato kombinace je konvexní - koeficienty jsou nezáporné z výběru γ, navíc $\sum(\gamma\beta_i + \alpha_i) = \sum \gamma\beta_i + \sum \alpha_i = 0 + 1 = 1$. A díky maximalitě γ existuje i tak, že $\gamma\beta_i + \alpha_i = 0$, tedy lze x vyjádřit jako kombinaci méně bodů, což je kýžený spor s minimalitou k. ⊞

Definice 14 (Nadrovina)**.** Nadrovina v $\mathbb{R}^n$ je $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ pro nějaká $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}, b \in \mathbb{R}$.

Definice 15 (Poloprostor)**.** Poloprostor v $\mathbb{R}^n$ je $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ pro nějaká $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}, b \in \mathbb{R}$.

Definice 16 (Konvexní mnohostěn)**.** Konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^n$ je průnik konečně mnoha poloprostorů.

Definice 17 (Omezený konvexní mnohostěn)**.** Řekneme, že X je omezený konvexní mnohostěn, je-li X omezená a konvexní mnohostěn.

Věta 4 (O oddělení)**.** Nechť C, D jsou konvexní, disjunktní, uzavřené a C je omezená.
Pak existuje nadrovina silně oddělující C, D, tj. $\exists a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R} : C \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x < b\}, D \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x > b\}$.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 5 (Minkowski-Weylova věta)**.** X je omezený konvexní mnohostěn, právě když $\exists V \subseteq \mathbb{R}^n : V$ je konečná a $X = \operatorname{conv}(V)$.

Důkaz. TODO ⊞

Definice 18 (Tečná nadrovina, stěna)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní mnohostěn. Pak $L = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = t\}$ je tečná nadrovina, jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t \wedge \exists x \in P : c^T x = T$.
Navíc, $\{x \in P : c^T x = t\} = L \cap P$ se nazývá (vlastní) stěna P. $\emptyset, P$ jsou také stěny, ovšem nevlastní.

Definice 19 (Vrchol, hrana, faseta)**.** Nechť $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní mnohostěn, $\dim(P) = d, F$ je stěna P.
Je-li $\dim(F) = 0$, řekneme, že F je vrchol P.
Je-li $\dim(F) = 1$, řekneme, že F je hrana P.
Je-li $\dim(F) = d - 1$, řekneme, že F je faseta P.

Věta 6. Nechť $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní mnohostěn.
Zadefinujeme $V_{ext} := \{x \in P : x \notin \operatorname{conv}(P \setminus \{x\})\}$ a označíme V množinu vrcholů.
Pak platí $V = V_{ext}$, navíc pokud P je omezená, tak $P = \operatorname{conv}(V)$.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 7 (Průnik stěn je stěna)**.** Nechť E, F jsou stěny konvexního mnohostěnu $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak $E \cap F$ je také stěna.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 8 (Stěna stěny je stěna)**.** Nechť E je stěna konvexního mnohostěnu $P, F \subseteq E$.
Pak F je stěna P, právě když F je stěna E.

Důkaz. TODO ⊞

Definice 20 (Minimální popis mnohostěnu)**.** Nechť $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b' \wedge A''b \leq b''\} \neq \emptyset$ je mnohostěn.
Pak popis P je minimální, jestliže nemůžeme žádnou podmínku vynechat a nemůžeme žádnou rovnici změnit na rovnici bez změny P.

Lemma 1 (O bodu mimo stěny)**.** Nechť $z \in P$ splňuje $A''z < b''$. Pak

- $\dim(P) = n - \operatorname{rank}(A')$
- z neleží v žádné vlastní stěně

Navíc, pokud je P minimální, tak takové z existuje.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 9 (Nerovnice v minimálním popisu a fasety)**.** V minimálním popisu $P \neq \emptyset$ nerovnice odpovídají vzájemně jednoznačně fasetám P. Navíc, každá vlastní stěna je podmnožinou nějaké fasety.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 10 (Jednoznačnost minimálního popisu)**.** Nechť $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je mnohostěn, $\dim(P) = n$. Pak minimální popis P je daný jednoznačně až na násobky nerovnic.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 11. Každá stěna E je průnikem nějakých faset. Navíc je průnikem právě $\dim(P) - \dim(E)$ faset.

Definice 21 (Báze, bázické řešení a přípustnost báze)**.** Pro $B \subseteq [n] : A_B = a_{*B}$ je podmatice matice A právě se sloupci s indexy z B. Analogicky pro vektory.
Řekneme, že B je báze, jestliže je A_B regulární.
Bázické řešení odpovídající B je $x : \forall i \notin B : x_i = 0$.
Řekneme, že báze je přípustná, jestliže její odpovídající bázické x je přípustné.

Lemma 2. Nechť x je přípustné řešení LP. Buď $K = \{i : x_i \neq 0\}$. Pak x je bázické $\Leftrightarrow$ A_k má lineárně nezávislé sloupce.

Důkaz. TODO ⊞

Lemma 3. Přípustná bázická řešení jsou právě vrcholy mnohostěnu přípustných řešení.

Důkaz. TODO ⊞

Definice 22 (Simplexová tabulka)**.** Simplexová tabulka odpovídající bázi B je soustava $m + 1$ lineárních rovnic ekvivalentní soustavě $Ax = b, c^T x = z$ s proměnnými x, z taková, že koeficienty u x_B a z tvoří jednotkovou matici.
Zapisujeme $x_B = p + Qx_N, z = z_0 + r^T x_N$ pro $N = [n] \setminus B$.

Lemma 4. V simplexové tabulce je $p = A_B^{-1} b, Q = A_B^{-1} A_N, z_0 = c^T A_B^{-1} b, r =$nějaký ošklivý výraz.

Lemma 5 (Farkasovo pro nerovnice)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Soustava $Ax \leq b$ má řešení $\Leftrightarrow$ neexistuje $y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0, A^T y = o, b^T y < 0$.

Důkaz. TODO ⊞

TODO: chybí osmá? přednáška

Věta 12 (O dualitě)**.** Nechť (P) je primární a (D) je duální lineární program. Pak pro ně platí právě jedna z možností

1. oba jsou nepřípustné
2. jeden je neomezený a druhý je nepřípustný
3. oba jsou přípustné s optimy $x^*, y^* : c^T x^* = b^T y^*$.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 13 (Podmínky komplementarity)**.** Nechť x, y jsou přípustná řešení pro (P) a (D). Pak x, y jsou optimální $\Leftrightarrow \forall j \in [n] : (A_{j*x} = b_j \vee y_j = 0)$.

Důkaz. TODO ⊞

Definice 23 (Kužel, polyedrální kužel)**.** $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá kužel, je-li uzavřená na nezáporné lineární kombinace.
C je polyedrální kužel (jehlan), jestliže C je zároveň kužel a konvexní mnohostěn.

Věta 14. C je polyedrální kužel, jestliže existuje konečná $V \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že X je množina všech nezáporných lineárních kombinací bodů z V.

Věta 15 (Minkowski-Weylova, silnější verze bez dk)**.** $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní mnohostěn $\Leftrightarrow$ existuje omezený konvení mnohostěn P a polyedrální kužel tak, že $X \subseteq P + C$.

Definice 24 (Kontrakce cyklu)**.** Kontrakce cyklu C v grafu G je multigraf $G/C : V(G/C) = (V(G) \setminus V(C)) \cup \{z_C\}, E(G/C) = \bigcup_{u,v \in G \setminus C \{u,v\} \in E(G)} \{\{u,v\}\} \cup \bigcup_{\{u,v\} \in E(G), u \in G \setminus C, v \in C} \{\{u, z_C\}\}$.

Pozorování. Ze zlepšující cesty v G' lze zkonstruovat zlepšující cestu v G. Totéž platí pro perfektní párování (pro liché cykly).

Algoritmus 1 („Edmondsův kytičkový“)**.** TODO

Algoritmus 2 (Párování minimální ceny v obecných grafech)**.** TODO

Definice 25 (Totálně unimodulární matice)**.** Matice je totálně unimodulární, jestliže determinant každé čtvercové podmatice je $1, 0$ nebo -1.

Věta 16 (Vrcholy polytopu daného TUM jsou celočíselné)**.** Nechť A je totálně unimodulární, $b \in \mathbb{Z}^n$. Pak mnohostěny $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b \wedge x \geq 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b \wedge x \geq 0\}$ mají všechny vrcholy celočíselné.
Pak přípustné LP $\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$ mají celočíselné optimum, pokud mají optimum.

Důkaz. TODO ⊞

Pozorování (O TUM)**.** TU matice mají pouze prvky $0, -1, 1$.
Totální unimodularita se zachovává při permutaci řádků a transpozici, vynásobením řádku -1, přidáním nebo vynecháním řádku s jednotkovým vektorem.

Věta 17 (Postačující podmínka totální unimodularity)**.** A je totálně unimodulární, pokud každý sloupec obsahuje nejvýše jednou 1 a nejvýše jednou -1.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 18 (Charakteristika TUM)**.** Nechť A má nejvýše dva nenulové prvky v každém sloupci. Pak A je totálně unimodulární, právě když přenásobením některých řádků -1 lze dostat A do tvaru, v němž obsahuje každý sloupec nejvýše jednou 1 a nejvýše jednou -1.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 19 (Incidenční matice orientovaného grafu je TU)**.** Incidenční matice orientovaného grafu je totálně unimodulární.

Věta 20 (O incidenční matici neorientovaného grafu a TU)**.** Incidenční matice neorientovaného grafu G je totálně unimodulární, právě když G je bipartitní.

Věta 21 (Königovo lemma)**.** V bipartitním grafu je velikost maximálního párování rovna velikosti minimálního vrcholového pokrytí.

Definice 26 (Matroid)**.** Nechť S je konečná mnořina, $I \subseteq 2^S$. Pak (S, I) je nazýván matroid, jestliže splňuje následující:

1. $\emptyset \in I$
2. I je uzavřená na podmnožiny

3. $\forall A \subseteq S$: všechny nezávislé množiny $J \subseteq A$ maximální vzhledem k inkluzi mají stejnou velikost.

Věta 22 (Věta o výměně v matroidu)**.** $B \subseteq 2^S$ je systém bází nějakého matroidu $\Leftrightarrow \forall B_1, B_2 \in B : \forall a \in B_1 \setminus B_2 \exists b \in B_2 : (B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\} \in B \wedge B \neq \emptyset$.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 23 (Algoritmus pro maximální nezávislou množinu v matroidu)**.** Maximální nezávislou množinu v matroidu lze nalézt hladově.

Definice 27 (Mnohostěn matroidu)**.** $P = \{x : \forall e > 0 : x_e \geq 0 \wedge \forall A : \sum_{e \in A} x_e \leq r(A)\}$ nazveme mnohostěnem matroidu.

Věta 24. P je omezený a celočíselný, navíc $P = \mathrm{conv}(\{x^A | A \in I\}) : x_e^A = 1 \Leftrightarrow e \in A$ a 0 jinak.

Věta 25. Mnohostěn průniku dvou matroidů je celočíselný.

Seznam témat