# Poznámky - matematická analýza I

**Petr Chmel**

## Základní věty a důkazy

**Věta 1** (Bernoulliova nerovnost)**.** $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq -2, n \in \mathbb{N} : (1+x)^x \geq 1 + nx$

*indukcí podle n.* $n = 1, n = 2$ zjevně platí.
$n \geq 1 : (1+x)^{n+2} = (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+2x+x^2) = 1+(n+2)x+x^2((1+x)n+1) \geq 1+(n+2)x$ ☐

**Tvrzení 1** (Prvočísel je nekonečně mnoho)**.**

*Důkaz.* Sporem: ať si je největší prvočíslo: pak všechna prvočísla vynásobím a přičtu jedničku - pak tohle číslo není dělitelné žádným ze známých prvočísel - spor. ☐

**Lemma 1** (Iracionalita $\sqrt{2}$)**.** $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

*Důkaz sporem.* Nechť $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \wedge p, q$ nesoudělná, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N}$. Pak $\dfrac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : p = 2k \Rightarrow \dfrac{4k^2}{q^2} = 2 \Rightarrow \dfrac{q^2}{k^2} = 2$. Ze stejného argumentu jako výše: $q = 2l, l \in \mathbb{N}$. Pak ovšem $p$ i $q$ jsou dělitelné dvěma, tedy jsou soudělná, což je spor. ☐

**Definice 1** (Závory, supremum, infimum, omezená množina)**.** Nechť $\leq$ je částečné uspořádání na $X$. Pak

- $x \in X$ je horní závora $A \subseteq X$, pokud $\forall a \in A : a \leq x$
- $x \in X$ je dolní závora $A \subseteq X$, pokud $\forall a \in A : x \leq a$
- $x \in X$ je supremum $A \subseteq X$, pokud $x$ je horní závora $A$ a pr každou horní závoru $x'$ množiny $A$ platí $x \leq x'$.
- $x \in X$ je infimum $A \subseteq X$, pokud $x$ je dolní závora $A$ a pr každou horní závoru $x'$ množiny $A$ platí $x' \leq x$.
- $A \subseteq X$ je shora omezená, pokud $A$ má horní závoru
- $A \subseteq X$ je zdola omezená, pokud $A$ má dolní závoru
- pokud existují, jsou supremum a infimum dány jednoznačně

**Definice 2** (Těleso)**.** Těleso je $(T, \cdot, +)$ taková, že:

- $\forall a, b \in T : a + b = b + a$
- $\forall a, b, c \in T : (a + b) + c = a + (b + c)$
- $\exists 0 \in T : \forall a \in T : 0 + a = a$
- $\forall a \in T \exists b \in T : a + b = 0$
- $\forall a, b \in T : ab = ba$
- $\forall a, b, c \in T : (ab)c = a(bc)$
- $\exists 1 \in T : \forall a \in T : 1a = a$
- $\forall a \in T \setminus \{0\} \exists b \in T : ab = 1$
- $\forall q, b, c \in T : (a + b) \cdot c = ac + bc$
- $0 \neq 1$

**Poznámka** (Axiom úplnosti)**.** $\forall X, Y \subseteq \mathbb{R}$ t.ž.$\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y$ existuje $c \in \mathbb{R}$ splňující $\forall x \in X : x \leq c \wedge \forall y \in Y : c \leq y$.

**Důsledek 1** (Existence suprema a infima omezené množiny v $\mathbb{R}$)**.** Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum. Každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.

*Důkaz.* 1. část: Nechť $X$ je neprázdná a shora omezená. Definujeme $Y = \{y \in \mathbb{R} : \forall x \in X : x \leq y\}$ - množinu všech horních závor X - ta je neprázdná. Dle axiomu úplnosti $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in X : x \leq c \wedge \forall y \in Y : c \leq y$. Tedy $c$ je horní závora $X$, která je menší nebo rovna všem horním závorám, tedy je supremem. □

**Věta 2** (Cantorova věta o vnořování intervalů)**.** Nechť $[a_1, b_1] > [a_2, b_2] > \ldots > [a_n, b_n] > \ldots$ jsou vnořené uzavřené intervaly. Pak $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$. Pokud navíc délky intervalů jsou k nule (infimum množiny délek je 0), pak $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$, které leží v průniku: $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{\alpha\}$.

*Důkaz.* Z vnořenosti intervalů plyne $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$ Definujeme $A = \{a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}, B = \{b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$. $A$ je neprázdná a shora omezená, tedy má supremum ($\alpha$). $B$ je neprázdná a zdola omezená, tedy má infimum ($\beta$). Dále $\forall n \in \mathbb{N} : [\alpha, \beta] \subset [a_n, b_n]$, tudíž $[\alpha, \beta] \subseteq \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, tedy průnik je neprázdný. Pokud $\inf |b_n - a_n| = 0$, pak $|\beta - \alpha| = 0$, tedy $\beta = \alpha$, tedy $[\alpha, \beta] = \{\alpha\}$ □

**Definice 3** (Nekonečná a spočetná množina)**.** $M$ je nekonečná, pokud existuje prosté zobrazení z $M$ do $M$, které není na.
$M$ je spočetná, pokud existuje bijekce $\mathbb{N} \to M$. $M$ je nespočetná, pokud není spočetná a je nekonečná

**Věta 3** (Cantorova věta o nespočetnosti reálných čísel)**.** Neexistuje zobrazení na $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

*Důkaz.* Ukážeme, že $X = \{0.c_1c_2c_3 \ldots : \forall i \in \mathbb{N} : c_i \in \{0, 1\}\} \subset \mathbb{R}$ je nespočetná, tedy neexistuje bijekce $\mathbb{N} \to X$.
Sporem: nechť taková bijekce existuje. Pak $n \in \mathbb{N}$ se zobrazí na $x = 0.c_{n1}c_{n2}c_{n3} \ldots \in X$ - vytvoříme si „tabulku“. Nyní uvažme číslo $p = 0, \overline{c_{11}c_{22} \ldots c_{nn} \ldots}$, kde $\overline{c_{ij}} = 1 - c_{ij}$. Toto číslo se s každým číslem v tabulce liší v alespoň jedné číslici, tedy není v tabulce, tedy bijekce nemůže existovat. □

**Definice 4** (Nekonečná posloupnost, monotonie, omezenost)**.** Nekonečná posloupnost prvků neprázdné množiny $A$ je zobrazení, které $n \mapsto a_n$ z $\mathbb{N}$ do $A$. Takovou posloupnost značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost je

- neklesající, pokud $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- rostoucí, pokud $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- nerostoucí, pokud $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- klesající, pokud $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- monotónní, pokud je nerostoucí nebo neklesající
- shora/zdola omezená, pokud je množina členů shora/zdola omezená.

**Definice 5** (Limita posloupnosti)**.** Nechť $(a_n)$ je posloupnost reálných čísel. Číslo $a \in \mathbb{R}$ je limita $(a_n)$, píšeme $\lim_{n\to\infty} q_n = a$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$. Pak o $(a_n)$ řekneme, že konverguje a má vlastní limitu. Jinak říkáme, že posloupnost diverguje.
Posloupnost $(a_n)$ reálných čísel má limitu rovnou $\infty$, pokud $\forall k \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in N : n \geq n_0 : a_n > k$.
Posloupnost $(a_n)$ reálných čísel má limitu rovnou $-\infty$, pokud $\forall k \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in N : n \leq n_0 : a_n > k$.
Pak říkáme, že posloupnost má nevlastní limitu.

**Věta 4** (Jednoznačnost limity)**.** Limita posloupnosti je určena jednoznačně, pokud existuje.

*Důkaz.* Sporem: ať si má dvě limity $A \neq B$. Pak vezmeme $\varepsilon = \frac{|A-B|}{3}$ - spor. □

**Věta 5** (Limita monotónní posloupnosti)**.** Je-li $(a_n) \subset \mathbb{R}$ neklesající a shora omezená, pak konverguje.

**Poznámka.** Symetricky platí pro nerostoucí a zdola omezenou. Pokud je posloupnost monotónní a neomezená, má nevlastní limitu. Stačí, že posloupnost je monotónní od nějakého $n_0$ dál.

*Důkaz.* $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je shora omezená, tedy existuje její supremum $a$. Pak $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : a_{n_0} > a - \varepsilon$. Díky monotonii pro $n \leq n_0 : a_n \geq a_{n_0} > a - \varepsilon$. Tedy $\forall n \geq n_0 q_n \in (a - \varepsilon, a)$, tedy $\lim a_n = a$. □

**Definice 6.** $(b_n)$ je podposloupnost $(a_n)$, pokud existuje ostře rostoucí zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $b_n = a_{f(n)}$.

**Věta 6** (O limitě podposloupnosti)**.** Je-li $(a_n)$ podposloupností $(b_n)$ a $(b_n)$ má limitu, pak $\lim a_n = \lim b_n$.

*Důkaz.* Uvážíme posloupnost indexů a z ní se nějak ukáže: $\exists n_0$, pak $\exists k_0 : k_0 \geq n_0$. □

**Věta 7** (Aritmetika limit)**.** Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou konvergentní posloupnosti s limitami $a, b$. Pak

1. $(a_n + b_n)$ konverguje a její limita je $a + b$
2. $(a_n \cdot b_n)$ konverguje a její limita je $a \cdot b$
3. pokud $b \neq 0 \wedge b_n \neq 0 \forall n$, pak $(\frac{a_n}{b_n})$ konverguje a její limita je $\frac{a}{b}$

*Důkaz.*
1. Dle trojúhelníkové nerovnosti máme $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$. Z předpokladů víme, že $\forall \varepsilon' > 0 \exists n_0 : \forall n \leq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon', |b_n - b| < \varepsilon'$. Tedy $\forall n \leq n_0 : |(a_n + b_n) - (a + b)| \leq 2\varepsilon' = \varepsilon$, tedy pro nám dané $\varepsilon$ volíme $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.
2. Dle trojúhelníkové nerovnosti máme $|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$. Pak $\forall 0 < \varepsilon' < 1 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon' \wedge |b_n - b| < \varepsilon' \wedge |b_n| < |b| + 1$. Tedy $|a_n b_n - ab| < \varepsilon'(|a| + |b| + 1) = \varepsilon$. Tedy volíme $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}$

□

**Věta 8** (Násobení limitní nulou (o omezené a mizející posloupnosti))**.** Nechť $(a_n)$ je omezená a $(b_n)$ konverguje k 0. Pak $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.

*Důkaz.* TODP □

**Věta 9** (Limita a uspořádání)**.** Nechť $(a_n), (b_n)$ mají vlastní limity $a, b$.

1. Když $a < b$, pak $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n < b_n$.
2. Když pro nějaké $n_0$ platí, že $\forall n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, pak $a \leq b$.

*Důkaz.* 1. BÚNO: $a < b$. Vezmeme $0 < \varepsilon \leq \frac{b-a}{3}$. Pak $\exists n_0 : \forall n > n_0 : a_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b_n$.
2. sporem: $\forall n : n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n \wedge a > b$ Spor z 1. □

**Věta 10** (O dvou policajtech)**.** Nechť $(a_n), (b_n), (c_n)$ splňují $\lim a_n = \lim c_n = a \in \mathbb{R} \wedge \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \leq c_n$. Pak $b_n$ konverguje a její limita je $a$-

*Důkaz.* Pozorování, pokud $c, e \in I$, kde $I$ je interval, pak $\forall d : c \leq d \leq e \Rightarrow d \in I$.
Z předpokladu $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0$ platí $a_n, c_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Vzhledem k pozorování: $b_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. □

**Věta 11** (Rozšířená aritmetika limit (!$\delta$))**.** Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti s limitami $a, b \in \mathbb{R}^*$. Pak

1. $\lim a_n + b_n = a + b$ MPSS
2. $\lim a_n \cdot b_n = ab$ MPSS
3. $\forall n : b_n \neq 0$, paklim $a_n / b_n = a/b$ MPSS

**Věta 12** (O monotónní posloupnosti)**.** Každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.

*Důkaz.* Indexem $j$ začíná dobrá podposloupnost, pokud $\exists k = k_1 < k_2 < \dots$ t.ž. $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \dots$
Indexem $j$ začíná špatná podposloupnost, pokud $\exists k = k_1 < k_2 < \dots < k_j$ t.ž. $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \dots \leq a_{k_j} \wedge a_{k_j} > n \forall n > k_j$.
Každé $k$ je začátkem dobré nebo špatné posloupnosti.
Index 1 je začátkem dobré nebo špatné podposloupnosti. Dobrá: ✓. Špatná: označíme $m_1$ poslední index špatné posloupnosti a vyšetříme $m_1 + 1$. Takto budeme pokračovat a buď najdeme debrou podposloupnost, nebo sestrojíme nekonečnou podposloupnost $m_1, m_2, \dots$ t.ž. $a_{m_1} > a_{m_2} > \dots$, což je nekonečná klesající podposloupnost $a_n$. □

**Věta 13** (Bolzano-Weierstrassova)**.** Každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost. (Toto lze rozšířit na neomezené posloupnosti, pak má (ne)vlastní limitu).

*Důkaz.* Dle předchozí věty má tato posloupnost monotónní podposloupnost, která je též omezená. Dle věty o limitě monotónní posloupnosti tato podposloupnost konverguje. □

**Definice 7** (Cauchyovskost)**.** $(a_n)$ je cauchyovská, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

**Věta 14** (Cauchyova podmínka)**.** Posloupnost reálných čísel je konvergentní $\Leftrightarrow$ je cauchyovská.

*Důkaz.* „$\Leftarrow$“: TODO □

**Definice 8** (Hromadný bod, limes superior, limes inferior)**.** Nechť $(a_n)$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že $A$ je hromadnýá bod $(a_n)$, pokud existuje podposloupnost $(a_{k_n})$ t.ž. $\lim a_{k_n} = A$. Jako $H((a_n))$ označíme množinu hromadných bodů posloupnosti.
$\liminf a_n = \min(H((a_n)))$, $\limsup a_n = \max(H((a_n)))$.

**Věta 15** (Ekvivalentní definice limsup a liminf)**.** Definujeme $b_n := supa_n, a_{n+1}, \dots$ a $c_n := supa_n, a_{n+1}, \dots$. Pak $\lim b_n = \limsup a_n, \lim c_n = \liminf a_n$

*Důkaz.* TODO □

**Věta 16** (Limita existuje $\Leftrightarrow$ limsup = liminf)**.** Limita $(a_n)$ existuje $\Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$.

*Důkaz.* TODO □

**Definice 9** (Nekonečná řada)**.** Je-li $(a_n)$ posloupnost, $\sum a_n$ nazýváme řadou, $a_n$ je n-tým členem řady, $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ je k-tý částečný součet řady. Součet řady je $\lim_{k\to\infty} s_k$. Budeme psát $\sum a_n = \lim_{k\to\infty} s_k$. Řada konverguje, pokud konverguje limita. Pokud limita je nevlastní, pok řada diverguje. Pokud řada nemá součet, někdy říkáme že osciluje.

**Věta 17** (Divergence harmonické řady)**.** Harmonická řada diverguje.

*Důkaz.* Uvažme $\sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n} \geq \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$. Tedy pro $k = 2^r$: $s_k \geq 1 + \log_2(k) \cdot 0.5$. A $\lim s_k \geq \lim(1 + \log_2(k) \cdot 0.5) = +\infty$. □

**Věta 18** (Nutná podmínka konvergence)**.** Nechť $\sum a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$

*Důkaz.* $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) \stackrel{\text{AL}}{=} \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0$. Protože řada konverguje, $s_n$ má vlastní limitu. □

**Věta 19** (Cauchyova podmínka pro řady)**.** Řada je konvergentní $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0 : n \geq n : |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$

*Důkaz.* $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0 : n \geq n : |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0 : n \geq n : |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$. Dle Cauchyovy podmínky pro posloupnosti $\Leftrightarrow (s_n)$ konverguje $\Leftrightarrow \sum a_n\, K$ □

**Věta 20** (Lineární kombinace řad)**.** Nechť $\sum a_n, \sum b_n$ jsou řady mající součet. Pak

1. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ t.ž. $\alpha \sum a_n$ je definován: $\sum \alpha a_n = \alpha \sum a_n$.
2. Je-li $\sum a_n + \sum b_n$ definovaný výraz, pak $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

*Důkaz.* Cvičení na aritmetiku limit. □

**Věta 21** (Srovnávací kritérium)**.** Nechť $a_n, b_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Pokud $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : a_n \leq b_N \wedge \sum b_n \, K$, pak $\sum a_n \, K$.
2. Nechť $\lim \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$. Pak
   - $0 < L < \infty : \sum a_n \, K \Leftrightarrow \sum b_n \, K$
   - $L = 0 : \sum b_n \, K \Rightarrow \sum a_n \, K$
   - $L = \infty : \sum a_n \, K \Rightarrow \sum b_n \, K$

*Důkaz.* Označme $s_k, t_k$ částečné součty $a_n, b_n$. Posloupnosti $s_k, t_k$ jsou neklesající, tedy pro konvergenci stačí dokázat omezenost shora.
1. $s_k \leq t_k$ NEmusí platit (ani pro libovolně velká $k$) - $a_n = b_n \forall n > n_0; a_n = b_n + 1 \forall n \leq n_0$. Ale víme, že $s_k \leq t_k + s_{n_0}(-t_{n_0})$. Pokud je $t_k$ shora omezená, pak $t_k + s_k$ je též shora omezená, tedy $s_k$ je také shora omezená.
2. Limita rovna nule: tedy $\exists n_0 = \forall n > n_0 : \frac{a_n}{b_n} < 1$, tedy $a_n < b_n$, tedy 1.
Limita rovna nekonečnu: Tedy $\exists n_0 = \forall n > n_0 : \frac{a_n}{b_n} > 1$, tedy $a_n > b_n$, tedy 1 s prohozením $a_n, b_n$.
Limita mezi ($l \in (0, \infty)$): $\exists n_O : \forall n \geq n_0 l/2 = \frac{a_n}{b_n} < 2l$: Zleva doprava: použijeme 1 s $b_n/2, a_n$. Zprava doleva: použijeme 1 s $a_n, 2lb_n$ □

**Věta 22** (D'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$

1. Pokud $\exists q \in (0; 1) \wedge n_I \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow \sum a_n \, K$
2. Pokud $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \, K$
3. Pokud $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \, K$
4. Existuje posloupnost $b_n$ s $\limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$, jež konverguje.
5. Pokud $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \, D$

*Důkaz.* $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$
1: Ukážu, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} q_k \, K$, pak $\sum a_n \, K$. Předpokládejme $n_0 = 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow a_{n+1} < qa_n \Rightarrow a_n \leq a_1 q^{n-1}$ - platí z indukce. Víme, že $q < 1 \Rightarrow \sum q^n \, K \Rightarrow \sum a_1 q^{n-1} \, K \Rightarrow \sum a_n \, K$ ze srovnávacího kritéria.
5: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ - dále jako v 1 s opačným výsledkem. □

**Věta 23** (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

1. Pokud $\exists q \in (0; 1) \wedge n_I \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : a_n^{\frac{1}{n}} < q \Rightarrow \sum a_n \, K$
2. Pokud $\limsup a_n^{1/n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \, K$
3. Pokud $\lim a_n^{1/n} < 1 \Rightarrow \sum a_n \, K$
4. Pokud $\limsup a_n^{1/n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \, D$
5. Pokud $\lim a_n^{1/n} > 1 \Rightarrow \sum a_n \, D$

*Důkaz.* 1. Pokud $a_n^{1/n} \leq q$, tak $a_n < q^n \forall n \geq n_0$. Pak ze srovnávacího kritéria a geometrické řady s $0 < q < 1$. $1 \Rightarrow 2$: $\limsup a_n \leq q_n$. $2 \Rightarrow 3$: Z definice asi $1 \Rightarrow 2$: $\limsup a_n^{1/n} = c > 1 \forall n_0 \exists n > n_0$ t.ž.$a_n^{1/n} > 1 + (\frac{c-1}{2})$, tedy $a_n > (1 + (\frac{c-1}{2}))^n$ - a tato posloupnost diverguje dle nutné podmínky. $2 \Rightarrow 3$: Z definice asi □

**Definice 10.** Řekneme, že řada konverguje absolutně, pokud $\sum |a_n|$ konverguje.

**Věta 24** (AK implikuje K)**.** Pokud řada konverguje absolutně, pak konverguje.

*Důkaz.* $\forall m,n; m > n : |a_{n+1} + \ldots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| = ||a_n + 1| + \ldots + |a_m||$. Tedy pokud $\sum |a_n|$ splňuje Cauchyho podmínku pro řady, pak $\sum a_n$ ji splňuje též □

**Věta 25** (Leibnizovo kritérium)**.** Nechť $(a_n)$ je nerostoucí a $\lim a_n = 0$. Pak $\sum (-1)^{n+1} a_n\, K$.

*Důkaz.* Pozorování: pro $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq 0$: $s_k := b_1 - b_2 + \ldots + -b_k \in [0; b_1]$.
Ze zadání: $\forall \varepsilon \exists n_0 : \forall n > n_0 : a_n \varepsilon$ (a $a_n \geq 0$). Tedy $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n, m > n_0, n$ liché (pro $n$ sudé vytkneme -1): $\sum (-1)^{k+1} a_k \in [0; a_n] + |\sum_{i=n}^{m} (-1)^{i+1} a_i| < \varepsilon$. Dle Cauchyovy podmínky řada konverguje. □

**Věta 26** (Abelovo a Dirichletovo kritérium (!$\delta$))**.** Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti, $(a_n)$ je nerostoucí a nezáporná. Pak

1. (Dirichlet) Když $\lim a_n = 0$ a $b_n$ má omezené částečné součty, pak $\sum (a_n b_n)\, K$
2. (Abel) Když $\sum b_n\, K$, pak $\sum (a_n b_n)\, K$

**Věta 27** (Cauchyovo kondenzační kritérium)**.** Když $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$, pak $\sum 2^n a_{2^n}\, K \Leftrightarrow \sum a_n\, K$.

*Důkaz.* $s_k$ - součty $a_n$, $t_k$ - součty té druhé.
„$\Leftarrow$“: Předpoklad: $s_k\, K$, chceme $t_k\, K$. Mějme $k, m \in \mathbb{N}, m > 2^k$. $s_n \leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geq a_1/2 + a_2 + 2a_+ \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{t_k}{2}$. $t_k$ je shora omezená a také je neklesající, tedy $\sum 2^n a_{2^n}\, K$.
„$\rightarrow$“ TODO, podobné □

**Důsledek 2** (CKK a funkce zeta)**.**

*Důkaz.* □

**Definice 11.** Nechť $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce a $\sum a_n$ je řada. Pak $\sum a_{p(n)}$ je přerovnáním řady.

**Věta 28** (Riemannova o přerovnání řad (!$\delta$))**.** Nechť $\sum a_n\, K$, ale ne absolutně. Pak $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$ existuje $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektivní t.ž. $\sum a_{p(n)} = \alpha$.

**Věta 29** (Přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** Nechť $\sum a_n\, AK$. Pak pro libovolné přerovnání řad $p$ platí $\sum a_{p(n)}\, AK$. (A součty se rovnají).

*Důkaz.* TODO □

**Definice 12.** Exponenciální funkce $e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

**Věta 30** (Vlastnosti funkce $e^x$)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

*Důkaz.* Rozepsání. □

**Věta 31** (Vyjádření $e^x$ pomocí limity posloupnosti (!$\delta$))**.** $\forall x \in \mathbb{R} : \lim(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$.

**Definice 13** (Sinus, kosinus)**.** Pro $x \in \mathbb{R}$ :. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
Obě řady konvergují z podílového kritéria

**Definice 14** (Okolíčka)**.** Pro $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$:
$U(a, \delta) := (a - \delta; a + \delta)$ - $\delta$-okolí bodu
$U(\infty, \delta) := (\frac{1}{\delta}; \infty)$
Prstencové okolí: $P(a, \delta) = (a - \delta; a + \delta) \setminus \{a\}$
Dále pravá a levá okolíčka...

**Definice 15** (Limita funkce v bodě)**.** Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$ je hormadný bod $M$, $A \in \mathbb{R}^*$.
Pak $\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 9 : f(P(a, \delta) \cap M) \subset U(A, \varepsilon)$.

**Definice 16** (Jednostranná limita funkce v bodě)**.** Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$ je hormadný bod $M$, $A \in \mathbb{R}^*$.
Pak $\lim_{x \to a^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 9 : f(P^+(a, \delta) \cap M) \subset U(A, \varepsilon)$.
V $+-\infty$ jednostranné limity neuvažujeme.

**Definice 17** (Spojitost (i jednostranná)). Nechť $f : M \to \mathbb{R}, a \in M$. Pak $f$ je v $a$ spojitá právě tehdy když $\forall\varepsilon\exists\delta > 0 : f(U(a, \delta) \cap M) \subset U(f(a), \varepsilon)$.
Dále $f$ je v $a$ spojitá zprava právě tehdy když $\forall\varepsilon\exists\delta > 0 : f(U^+(a, \delta) \cap M) \subset U(f(a), \varepsilon)$.

**Věta 32** (Jednoznačnost limity funkce). Pokud limita funkce v bodě existuje, je určena jednoznačně.

*Důkaz.* Ať má funkce v bodě $a$ dvě limity: $A \neq B$. Pak vezmeme $\varepsilon > 0$t.ž.$U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$ (což lze). Pak by mělo existovat vhodné delta z definice, ale to neexistuje. □

**Věta 33** (Heineho věta). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $M, A \in \mathbb{R}^*$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Pak NTJE:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$
2. $\forall(x_n) \subset M : \lim x_n = a \wedge x_n \neq a\forall n \in \mathbb{N}$ je $\lim f(x_n) = A$

*Důkaz.* TODO □

**Věta 34** (Aritmetika limit funkcí (!$\delta$)). $a \in \mathbb{R}*$, $f, g$ def. na $P(a)$, limity jsou $A, B \in \mathbb{R}^*$. Pak

1. limita součtu je součet limit
2. limita součinu je součin limit
3. je-li navíc $g(x)$ na nějakém prstencovém okolí nenulové je limita podílu rovna podílu limit.

Ve všech případech má-li pravá strana smysl.

**Věta 35** (Limita monotónní funkce). Nechť $a, b \in R^*, a < b, f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Pak limity v krajních bodech intervalu existují.

*Důkaz.* Nechť $f$ je na $(a, b)$ neklesající. Pak zřejmě $\lim_{x\to b} = \sup(f((a, b)))$. Další tři případy analogicky. □

**Věta 36** (Limita funkce a uspořádání (!$\delta$)). Nechť $f, g, h$ je definované na prst. okolí $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

1. $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow \exists\delta > 0 : \forall x \in P(a, \delta) : f(g) > g(x)$.
2. $\exists\delta > 0 : \forall x \in P(a, \delta) : f(g) \geq g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A \in \mathbb{R}^* \wedge \exists\delta > 0 : \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = A$

**Věta 37** (Limita složené funkce). $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, $f$ def min. na $P(A), \lim_{x\to A} f(x) = B, g$ def min. na $P(a)$, $\lim_{x\to a} g(x) = A$ a $f$ je v $A$ spojitá nebo $g$ se na okolí nerovná $A$, pak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

*Důkaz.* Hraní si s intervaly a definicemi. □

**Definice 18** (Spojitost na intervalu). $f$ je spojitá na intervalu, když je spojitá v každém bodě intervalu.

**Věta 38** (Darbouxova o mezihodnotě). Nechť $a, b, y \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá na $[a, b]$ a $f(a) < y < f(b)$. Pak $\exists\alpha \in [a, b] : f(\alpha) = y$.

*Důkaz.* TODO □

**Věta 39** (Obraz intervalu spojitou funkcí). Když $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je na $I$ spojitá, pak $f(I) \subset \mathbb{R}$ je též interval

*Důkaz.* Plyne z Darbouxovy věty o střední hodnotě. □

**Věta 40** (Extrémy spojité funkce). Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá na $[a, b]$. Potom $f([a, b])$ má minimum a maximum.

*Důkaz.* TODO □

**Definice 19** (Inverzní funkce a monotonie)**.** Nechť $f: M \to \mathbb{R}$ je prostá funkce Pak definujeme inverzní funkci $f^{-1}: f(M) \to M : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

**Věta 41** (Spojitost inverzní funkce (!$\delta$))**.** Nechť $I$ je interval a $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá, rostoucí funkce. Pak $f^{-1}: J = f(I) \to I$ je na $J$ spojitá a rostoucí.

**Definice 20** (Derivace)**.** $a \in \mathbb{R}, \delta > 0, f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$. Pak derivace funkce v bodě je $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, pokud tato limita existuje.
Analogicky definujeme jednostranné derivace.

**Věta 42** (Derivace a spojitost)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}, \delta > 0, f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ a existuje vlastní derivace $f$ v $a$: $f'(a) \in \mathbb{R}$. Pak $f$ je spojitá v $a$.

*Důkaz.* Z definice pro dané $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| \le \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a) - (f'(a)f(x-a))| < \varepsilon|x-a| \Rightarrow$ $|f(x) - f(a)| < |x-a|(\varepsilon + |f'(a)|)$. Tedy pro dané $\epsilon$ volím $\delta = \min(\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{\varepsilon+|f'(a)|}\})$. □

**Věta 43** (Aritmetika derivací - Dk pouze Leibnizova formule)**.** $a \in \mathbb{R}, \delta > 0, f, g : U(a,\delta) \to \mathbb{R}, f'(a), g'(a) \to \mathbb{R}^*$ Pak

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, MPSS
2. (Leibnizova formule) $(fg)'(A) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$, MPSS a $f$ nebo $g$ je v $a$ spojité.
3. $g(a) \neq 0, g$ spojitá v $a$, pak $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, MPSS.

*Důkaz.* BÚNO g spojitá v $a$. Pak $(fg)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)(f(x)-f(a))+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} \overset{\text{AL}}{=}$ $\lim_{x\to a} g(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$ □

**Věta 44** (Derivace složené funkce (!$\delta$))**.** $a, b \in \mathbb{R}, f$ def na okolí $b$, $g$ def na okolí $a$, $g(a) = b$, $g$ spojitá v $a$ a existují derivace $g'(a), f'(b) \in \mathbb{R}^*$. Pak $(f \circ g)'(a) = f'(b)g'(A) = f'(g(a))g'(a)$, MPSS

**Věta 45** (Derivace inverzní funkce (!$\delta$))**.** Nechť $J$ je interval a $f: J \to \mathbb{R}$ spojitá na $J$ je rostoucí nebo klesající, $a \in J$ je vnitřní bod intervalu, $f(a) = b \wedge \exists f'(a) \in \mathbb{R}^*$. Pak inverzní funkce má v $b$ derivaci $(f^{-1}(b) = a)$ a platí:

1. Pokud $f'(a) \neq 0$, pak $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f(b))}$
2. Pokud $f'(a) = 0$ a $f$ je rostoucí, pak $(f^{-1})'(a) = \infty$
3. Pokud $f'(a) = 0$ a $f$ je klesající, pak $(f^{-1})'(a) = -\infty$

**Definice 21** (Lokální extrémy)**.** Nech't $a \in M \subset \mathbb{R}, f: M \to \mathbb{R}$ Funkce $f$ má v $a$ extrém (dle jména), pokud $\exists \delta > 0 : \forall x \in P(a,\delta) f(x)$ něco $f(a)$.

**Věta 46** (Nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}, \delta > 0, f'(a) \neq 0$ a derivace existuje. Pak $f$ nemá v $a$ lokální extrém.

*Důkaz.* Pro libovolné $\delta$ najdeme $b, c \in P(a,\delta)$ t.ž. $f(b) < f(a) < f(c)$. BÚNO: $f'(a) < 0$, tedy z definice derivace zjistíme, že $f(x) - f(a) > 0$ - můžeme vzít libovolné $c$. Totéž s limitou zprava pro $b$ □

**Věta 47** (Věty o střední hodnotě - DK jen Rolleova věta)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojité a mající derivace na $(a,b)$.

1. (Rolleova věta) Pokud $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a,b) : f'(c) = 0$.
2. (Lagrangeova věta) $\exists c \in (a,b)$ t.ž. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
3. (Cauchyova věta) Když na $(a,b)$ je derivace $g$vlastní a nenulová, pak $\exists c \in (a,b)$ t.ž. $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

*Důkaz.* TODO □

**Věta 48** (L'Hospitalovo pravidlo (!$\delta$))**.** $a \in \mathbb{R}^*, f, g$ def na $P(a)$, mají vlastní derivace v $a$ a $g'(a) \neq 0$. Pak

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$ Pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.
2. $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$ a $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$ Pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

**Věta 49** (Limita a derivace (!$\delta$))**.** Nechť $f$ je spojitá zprava v $a$ a existuje limita zprava $f(x)$. Pak $f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

**Věta 50** (Derivace a monotonie)**.** $f : J \to \mathbb{R}$ spojitá na $J$ a má derivaci v každém vnitřním bodě. Pokud $f' \geq 0$, je na $f$ na $J$ neklesající. A jiné monotonie analogicky.

*Důkaz.* Z Lagrangeovy věty. □

**Definice 22** (Derivace vyšších řádů)**.** $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

**Definice 23** (Konvexita, konkavita)**.** $J$ interval, $f : J \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $f$ je na $J$ *** pokud $\forall a, b, c \in J : a < b < c$:

- konvexita: $f(b) \leq f(a) + (f(c) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{c-a}$
- konkavita: $f(b) \geq f(a) + (f(c) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{c-a}$

**Věta 51** (Konvexita a první derivace (!$\delta$))**.** $f$ konvexní na intervalu $J$. Pak v každém vnitřním bodě existuje derivace zleva a zprava (nemusí být nutně stejné). (Důsledek: je-li fce konvexní nebo konkávní na intervalu, je na něm spojitá).

**Věta 52** (Konvexita a druhá derivace (!$\delta$))**.** Když druhá derivace existuje (atd.), tak když $f'' > 0$, pak je funkce konvexní. Když je $f'' < 0$, je funkce konkávní.

**Definice 24** (Inflexní bod)**.** $f$ definovaná na okolí $a$. Pak $f$ má v $a$ inflexní bod, pokud $\exists f'(a)$ vlastní a $\exists \delta > 0$ :

- $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$
- $x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$

nebo naopak.

**Věta 53** (Nutná a postačující podmínka inflexe (!$\delta$))**.** Nechť $f$ je definovaná na okolí $a \in \mathbb{R}^*$.

- Pokud existuje nenulová druhá derivace v $a$, pak $f$ v $a$ nemá inflexní bod.
- Pokud $f$ má spojitou první derivaci na $(b, c), a \in (b, c), f'' > 0$ na $(b, a), f'' < 0$ na $(a, c)$ nebo naopak, pak $a$ je inflexním bodem $f$.

**Definice 25** (Taylorův polynom)**.** Taylorův polynom řádu $n$ funkce $f$ v bodě $a$ je $T_n^{f,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x - a)^i$.

**Věta 54** (Charakterizace Taylorova polynomu)**.** $a, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0, f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0 a \exists$ vlastní n-tá derivace $f$. Pak Taylorův polynom splňuje následující: $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$. Navíc je jediný polynom stupně $\leq n$ s touto vlastností.

*Důkaz.* TODO □

**Definice 26** (Zbytek)**.** $R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$

**Věta 55** (Obecný tvar zbytku Taylorova polynomu (!$\delta$))**.** $a, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0, f, \phi : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ t.ž. na $U(a, \delta)$ existují $f^{(n)}, \phi' \neq 0$. Pak $\forall x \in P(a, \delta \exists c \in (a, x)$ t.ž. $R_n^{f,a}(x) = \frac{\phi(x) - \phi(a)}{n\phi'(c)} f^{(n+1)}(c)(x - c)$

**Definice 27** (Taylorova řada)**.** Má-li $f$ v bodě $a$ všechny vlastní derivace, můžeme místo polynomu definovat tzv. Taylorovu řadu funkce $f$ se středem $a$. $T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x - a)^i$

# Seznam témat