Poznámky - matematická analýza II

Petr Chmel

Primitivní funkce

Definice 1 (Primitivní funkce)**.** Nechť I je neprázdný interval. Funkce $F(x) : I \to \mathbb{R}$ je primitivní funkcí funkce $f : I \to \mathbb{R}$ pokud $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$

Věta 1 (Množina primitivních funkcí)**.** Nechť F je primitivní funkcí k f na intervalu I. Pak $\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ je množina všech primitivních funkcí k f na I.

Důkaz. Pro důkaz: $I(f) := \{G : \forall x \in I : G'(x) = f(x)\}$.
„$I(f) \supseteq \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$“: Mějme $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$.
„$I(f) \subseteq \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$“: Mějme $G \in I(f)$ a definujme $H = G - F$. Pak uvažme $H' = G' - F' = f - f = 0 \Rightarrow H = d \in \mathbb{R}$ na I, tedy $d = G - F \Rightarrow G = f + d, d \in \mathbb{R} \Rightarrow G \in \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$. ⊞

Věta 2 (Linearita primitivních funkcí)**.** Pokud $f, g : I \to \mathbb{R}$ mají na I primitivní funkce F, G, pak $\int(af + bg) = a\int f + b\int g = aF + bG + c$

Důkaz. $(aF + bG + c)' = aF' + bG' + c' = af + bg$ ⊞

Primitivní funkce a spojitost

Věta 3 (Spojitá funkce má primitivní funkci)**.** Je-li f spojitá na I, pak má na I primitivní funkci.

Důkaz. Později ⊞

Věta 4 (Funkce s primitivní funkci má Darbouxovu vlastnost)**.** Je-li F na I primitivní funkcí k f, pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy nabývá všech mezihodnot.

Důkaz. Mějme $x_1, x_2 \in I : f(x_1) \neq f(x_2)$ a předpokládejme $x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$. Vezměme libovolné $c \in (f(x_1), f(x_2))$. Chceme $y \in I : f(y) = c$.
Zadefinujeme si funkci $H(x) := F(x) - cx$, tedy $H'(x) = f(x) - c$. H je spojitá funkce na $[x_1, x_2]$, tedy tam nabývá extrémy. Nyní vidíme, že $c > f(x_1) \Rightarrow H'(x_1) < 0, c < f(x_2) \Rightarrow H'(x_2) > 0$. Nemůže se tedy jednat o minima - minimum se nabývá na intervalu $(x_1, x_2) \Rightarrow \exists y \in (x_1, x_2) : f(y) = c$.
Pokud $f(x_1) > f(x_2)$, nebude se jednat o minima, ale maxima, jinak by měl být argument stejný. ⊞

Věta 5 (Spojitost primitivní funkce)**.** Je-li F primitivní funkcí k f na I, pak F je spojitá na I.

Důkaz. Ze MA I: existence vlastní derivace implikuje spojitost v bodě. Také víme, že $F'(x) = f(x)$, tedy F má na I v každém bodě vlastní derivaci, tedy je na I spojitá. ⊞

Věty pro výpočet primitivních funkcí

Věta 6 (Integrace per partes)**.** Jsou-li f, g spojité na I a F, G jsou jejich primitivní funkce, pak platí $\int fG + \int Fg = FG + c$ na I.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $\int fG, \int Fg$ existují. F, G jsou ze spojitosti primitivní funkce na I spojité, f, g z předpokladu. Součin spojitých funkcí je též spojitá funkce, tedy Fg, fG jsou spojité a tedy z věty o primitivní funkci spojité funkce mají primitivní funkci.
Z linearity primitivní funkce také plyne $\int fG + \int Fg = \int(fG + Fg)$. Dále též $(FG + c)' = fG + Fg \to \int(fG + Fg) = FG + c$. Spojením dostaneme $\int fG + \int Fg = FG + c$. ⊞

Věta 7 (První věta o substituci)**.** Nechť $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}^*, a < b, \alpha < \beta, \varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ a φ má vlastní derivaci v každém bodě (α, β), $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a F je na (a, b) primitivní funkcí f.
Potom $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c$ na (α, β).

Důkaz. $[F(\varphi(x)) + c]' = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + 0$ ⊞

Věta 8 (Druhá věta o substituci)**.** Nechť $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}^*, a < b, \alpha < \beta, \varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ a φ má vlastní nenulovou derivaci v každém bodě (α, β) (tedy je bijekce).
Jestliže $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + c$ na (α, β), pak $\int f(y)dy = G(\varphi^{\langle -1 \rangle}(y)) + c$ na (a, b).

Důkaz. $G'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$
Z věty o derivaci inverzní funkce: $(\varphi^{\langle -1 \rangle}(x)) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{\langle -1 \rangle}(x))}$
$[G(\varphi^{\langle -1 \rangle}(y)) + c]' = G'(\varphi^{\langle -1 \rangle}(y)) \cdot [\varphi^{\langle -1 \rangle}(y)]' = f(\varphi(\varphi^{\langle -1 \rangle}(y))) \cdot \varphi'(\varphi^{\langle -1 \rangle}(y)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{\langle -1 \rangle}(y))} = f(y).$ ⊞

Primitivní funkce racionálních funkcí

Definice 2 (Racionální funkce)**.** $R(x)$ je racionální funkce, pokud $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy a $Q(x) \neq 0$.

Věta 9 (Primitivní funkce racionálních funkcí (!δ)))**.** Primitivní funkci racionální funkce lze vždy vyjádřit pomocí racionálních funkcí, logaritmů a arctg.

Náznak důkazu:

Fakt 1 (Eukleidův algoritmus dělení polynomů)**.** $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, deg $P_2(x) <$ deg $Q(x)$, vše polynomy.

Fakt 2 ($Q(x)$ je součin polynomů nejvýše druhého stupně)**.** $Q(x)$ lze vyjádřit jako součin polynomů stupně nejvýše 2. Tedy $Q(x) = a \prod_{i=1}^{k} (x - \gamma_i)^{p_i} \cdot \prod_{i=1}^{l} (x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^{q_i}$, kde a označujeme jako vedoucí koeficient $Q(x)$, γ_i jsou vzájemně různé, $x^2 + \alpha_i x + \beta_i$ jsou navzájem různé, ireducibilní.

Fakt 3 (Rozklad na parciální zlomky)**.** $\frac{P_2(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{A_{ij}}{(x-\gamma_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+\alpha_i x+\beta_i)^j}$.

Definice 3 (Dělení intervalu, norma dělení)**.** Pro interval $[a, b]$ definujeme dělení intervalu D jako $k + 1$-tici bodů $a_0, \ldots, a_k : a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$. Pro $i \in [k] : I_k = [a_{i-1}, a_i]$, $|I_i| = a_i - a_{i-1}, \sum_{i=1}^{k} |I_i| = |[a, b]| = b - a$.
Dále definujeme normu dělení jako $\lambda(D) = \max_{i \in [k]} |I_i|$.
Dělením intervalu s body rozumíme (D, C), kde D je dělení intervalu a C je k-tice bodů takových, že $c_i \in I_i$

Definice 4 (Riemannova suma, Riemannův integrál)**.** Riemannova suma funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ s dělením intervalu D s body C je $R(f, D, C) = \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot f(c_i) = \sum_{i=1}^{k} |a_i - a_{i-1}| \cdot f(c_i)$.
Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál $I \in \mathbb{R}$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$ dělení $[a, b]$ s body (D, C) takové, že $\lambda(D) < \delta$ platí $|I - R(f, D, C)| < \varepsilon$.

Poznámka (Zápis Riemannova integrálu, třída Riemannovsky integrovatelných funkcí)**.** Píšeme $I = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = (R) \int_a^b f$. Dále $\mathcal{R}(a, b)$ je třída Riemannovsky integrovatelných funkcí na $[a, b]$.

Definice 5 (Horní a dolní sumy a integrály)**.** Pro dělení intervalu $[a, b]$ D a funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:
Horní Riemannova suma je $S(f, D) = \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot M_i$, kde $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$.
Dolní Riemannova suma je $s(f, D) = \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot m_i$, kde $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$.
Horní Riemannův integrál je $\overline{\int_a^b} f = \inf_D S(f, D)$.
Dolní Riemannův integrál je $\underline{\int_a^b} f = \sup_D s(f, D)$.

Definice 6 (Darbouxova ekvivalentní definice Riemannova integrálu)**.** Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = I \in \mathbb{R}$, řekneme že f má na $[a, b]$ Riemannův integrál I.

Definice 7 (Zjemnění dělení)**.** Říkáme, že D' je zjemnění dělení D (kde D je dělení na $[a, b]$), pokud $D = (a_0, \ldots, a_k), D' = (b_0, \ldots, b_{k'}), k \geq k \wedge \forall i \exists j : a_i = b_j$. Píšeme $D \subseteq D'$.

Lemma 1 (Riemannovy sumy a zjemnění)**.** Pokud $D \subseteq D'$, pak $s(f, D') \geq s(f, D) \wedge S(f, D') \leq S(f, D)$.

Důkaz. Jen první nerovnost a jeden interval $[a_{l-1}, a_l]$, kde $a_{l-1} = b_j, a_l = b_{j+r}$.
Chci: $m_l \cdot |I_l| \leq \sum_{i=j+1}^{j+r} |I_i'| m_i'$. Pozorování: $\forall i = j + 1, \ldots, j + r : m_l \leq m_i'$. Z tohoto plyne $\sum_{i=j+1}^{j+r} |I_i'| m'i \geq m_l \cdot \sum_{i=j+1}^{j+r} |I_i'| = m_l \cdot |I_l|$. ⊞

Důsledek 1 (Horní, dolní integrál a dvě různá dělení)**.** Pro libovolná dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ platí $s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$.

Důkaz. Nechť $E = D_1 \cup D_2$ - společné zjemnění. Dle lemmatu o Riemannových sumách a zjemnění: $s(f,D_1) \leq s(f,E) \leq S(f,E) \leq S(f,D_2)$. ⊞

Věta 10 (Dolní RI je nejvýše horní RI)**.** Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}, m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), D, D'$ jsou dělení $[a,b]$.
Pak $m(b-a) \overset{(1)}{\leq} s(f,D) \overset{(2)}{\leq} \underline{\int_a^b} f \overset{(3)}{\leq} \overline{\int_a^b} f \overset{(4)}{\leq} S(f,D') \overset{(5)}{\leq} M(b-a)$

Důkaz. Nerovnosti 1,5 platí z lemmatu o zjemnění.
Nerovnosti 2,4 plynou z definice horního/dolního Riemannova integrálu.
3 ukážeme sporem: ať $\underline{\int_a^b} f > \overline{\int_a^b} f$. Tedy z definice existují dělení $E_1, E_2 : S(f,e_2) < s(f,E_1)$, to je ovšem spor s definicí. ⊞

Věta 11 (Kritérium integrovatelnosti)**.** Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak $f \in \mathcal{R}(a,b) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists D$ dělení $[a,b] : 0 \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Máme $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z definice horního a dolního Riemannova integrálu $\exists$ dělení E_1, E_2 t.ž. $s(f,E_1) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$, $S(f,E_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$.
Vezměme společné zjemnění $D = E_1 \cup E_2$. Dle lemmatu o zjemnění $s(f,E_1) \leq s(f,D) \wedge S(f,e_2) \geq S(f,D) \Rightarrow S(f,D) - s(f,D) \leq S(f,E_2) - s(f,E_1) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - (\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$.
„$\Leftarrow$“: Nechť máme ε. Vezměme D splňující $0 \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. Tedy $\overline{\int_a^b} f \leq S(f,D) \overset{\text{předpoklad}}{<} s(f,D) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon \Rightarrow \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon \Rightarrow \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{R}(a,b)$. ⊞

Věta 12 (Monotonie implikuje integrovatelnost)**.** Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotónní (tj. nerostoucí nebo neklesající) na $[a,b]$, pak $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Důkaz. Nechť f je neklesající (nerostoucí analogicky). Pak $\forall[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ platí $\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) = f(\alpha)$, $\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) = f(\beta)$. Pro dané $\varepsilon' > 0$ vezmeme dělení $D = (a_0, a_+, \ldots, a_k) : \lambda(D) < \varepsilon'$. Budeme shora odhadovat $S(f,D) - s(f,D)$.

$$S(f,d) - s(f,D) = \sum_{i=1}^{k} |I_i|(M_i - m_i) = \sum_{i=1}^{k} |I_i|(f(a_i) - f(a_{i-1})) \leq \varepsilon' \sum_{i=1}^{k} (f(a_i) - f(a_{i-1}) = \varepsilon'(f(b) - f(a))$$

Pro $\varepsilon > 0$ vezmeme $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Pak dělení D s $\lambda(D) < \varepsilon'$ splňuje $S(f,D) - s(f,D) \leq \varepsilon'(f(b) - f(a)) \leq \varepsilon$. Tedy dle kritéria integrovatelnosti $f \in \mathcal{R}(a,b)$. ⊞

Definice 8 (Stejnoměrná spojitost)**.** Funkce f je stejnoměrně spojitá na I, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in I : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$. (Stejnoměrná spojitost implikuje spojitost)

Věta 13 (Na kompaktu spojitost = stejnoměrná spojitost)**.** Funkce f je na $[a,b]$ spojitá $\Leftrightarrow$ f je na $[a,b]$ stejnoměrně spojitá

Důkaz. „$\Leftarrow$“: Plyne z definice.
„$\Rightarrow$“: sporem: nechť f je na $[a,b]$ spojitá a není stejnoměrně spojitá, tedy splňuje $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x, x' \in I : |x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$.
Mějme dáno $\varepsilon > 0$, vezmeme $\delta = \frac{1}{n}$ a příslušná x_n, x_n' splňující $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$. Máme tedy posloupnosti $(x_n), (x_n') \subseteq [a,b]$. Dle Bolzano-Weierstrassovy věty lze vybrat $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ t.ž. $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}, (x'_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ konvergují. Navíc nutně konvergují k limitě $\alpha \in [a,b]$.
Dále $0 = f(\alpha) - f(\alpha) \overset{\text{spojitost}}{=} lim_{x\to\alpha} f(x) - lim_{x\to\alpha} f(x) \overset{\text{Heine}}{=} \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) \underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\overset{\text{AL}}{=}} \lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}))$. Tedy pro libovolné $\varepsilon' > 0 \exists k \in \mathbb{N} : f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \leq \varepsilon$, tedy i pro naše dané ε. To je ovšem spor s tím, že f není stejnoměrně spojitá. ⊞

Věta 14 (Spojitost implikuje integrovatelnost)**.** Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, pak $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Důkaz. Podle věty o spojitosti a stejnoměrné spojitosti na kompaktu je f na $[a,b]$ stejnoměrně spojitá. Tedy $\forall \varepsilon' > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in I : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon'$, speciálně pro $\alpha, \beta \in [a,b]$ t.ž. $\alpha < \beta, \beta - \alpha < \delta$. Pak $\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) - \inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \le \varepsilon$.
Vezměme libovolné dělení D intervalu $[a,b]$, t.ž. $\lambda(D) < \delta$. Pak

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \left(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) - \inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \right) \le \varepsilon' \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon'(b-a)$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ můžeme zvolit $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{b-a}$ a příslušné δ, dostaneme D t.ž. $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$, tedy z kritéria integrovatelnost plyne $f \in \mathcal{R}(a,b)$ ⊞

Věta 15 (Linearita Riemannova integrálu)**.**

1. Nechť $f, g \in \mathcal{R}(a,b), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(a,b) \wedge \int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$. (Linearita vůči integrandu)
2. Nechť $c \in (a,b), f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak $f \in \mathcal{R}(a,b) \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}(a,c) \wedge f \in \mathcal{R}(c,b)$. Navíc $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Důkaz.
1a) $-f \in \mathcal{R}(a,b)$. Pozorování: $\inf_I(-f) = -\sup_I(f), \sup_I(-f) = -\inf_I(f)$. Tedy $S(-f,D) - s(-f,D) = -s(f,D) - (-S(f,D)) = S(f,D) - s(f,D)$.
1b) $\alpha \ge 0, \alpha f \in \mathcal{R}(a,b)$. Pozorování: $\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f, \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f$. Tedy $S(\alpha f,D) - s(\alpha f,D) = \alpha(S(f,D) - s(f,D))$.
1c) $f + g \in \mathcal{R}$. Pozorování: $\sup_I f + g \le \sup_I f + \sup_I g, \inf_I f + g \ge \inf_I f + \inf_I g$. Tedy $S(f+g,D) - s(f+g,D) \le [S(f,D) + S(g,D)] - [s(f,D) + s(g,D)]$.
2) Lze předpokládat $c \in D = (a_0, \ldots, a_m = c, \ldots, a_k)$. Uvažme $D' = (a_0, \ldots, a_m), D'' = (a_m, \ldots, a_k)$. Zjevně $S(f,D) = S(f,D') + S(f,D''), s(f,D) = s(f,D') + s(f,D'')$. Dále $S(f,D) - s(f,D) = S(f,D') - s(f,D') + S(f,D'') - s(f,D'')$. ⊞

Věta 16 (Lebesgueova charakterizace integrovatelných funkcí (!∂))**.** Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál $\Leftrightarrow$ množina bodů nespojitosti f na $[a,b]$ má nulovou míru.

Definice 9 (Nulová Lebesgueova míra)**.** Množina $M \subset \mathbb{R}$ má nulovou Lebesgueovu míru, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists$ posloupnost intervalů $I_1, \ldots$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon \wedge M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

Příklad 1 (Množiny (ne)nulové míry)**.**

- Interval nenulové délky NEMÁ nulovou míru
- Podmnožina množiny nulové míry má nulovou míru
- Pokud $M_1, \ldots$ jsou množinu nulové míry, pak $\bigcup M_i$ má zaručeně nulovou míru, pokud je množin spočetně mnoho. Pokud jich je nespočetně mnoho, pak nemusí mít nulovou míru.
- $\emptyset$, {x}, konečně prvkové množiny a spočetné množiny mají nulovou míru
- Existují nespočetné množiny míry 0 (např. Cantorovo diskontinuum)

Věta 17 (1. základní věta analýzy)**.** Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b), F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definovaná jako $F(x) := \int_a^x f$. Pak

1. F je spojitá
2. Pokud F je spojitá v $x_0 \in [a,b]$, pak $\exists$ vlastní derivace $F'(x_0) = f(x_0)$. Pro a, b toto platí jednostranně.

Důkaz. $c = \sup_{[a,b]} |f(x)| \in \mathbb{R}$ (funkce je integrovatelná, tedy omezená).

1. $|F(x) - F(x_0)| = |\int_a^x f - \int_a^{x_0} f| \underset{\text{v mezích}}{\overset{\text{lin. RI}}{=}} |\int_{x_0}^x f| \leq |x - x_0| \cdot c$. Dále $\lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$, tedy F je v x_0 spojitá. Navíc jsme na x_0 nekladli žádné podmínky, tedy F je spojitá na $[a, b]$.

2. Máme dané $x_0 \in [a, b]$, f spojitou v $x_0 : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ pro $\forall x : |x - x_0| < \delta$.

   Odteď budeme předpokládat $0 \leq x - x_0 < \delta$. Upravíme: $F'(x_0) = \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0}$. Dále odhadneme:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \inf_{[x_0,x]0} f = \frac{1}{x - x_0} \cdot |x - x_0| \cdot \inf_{[x_0,x]} f \leq \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \leq \frac{1}{x - x_0} \cdot |x - x_0| \cdot \sup_{[x_0,x]} f = \sup_{[x_0,x]} f \leq f(x_0) + \varepsilon$$

   Z odhadu dostáváme $\lim_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

⊞

Důsledek 2 (Spojitá funkce má primitivní funkci)**.** Je-li f spojitá na I, pak má na I primitivní funkci.

Důkaz. Spojitost implikuje Riemannovskou integrovatelnost, tedy $F(x) = \int_a^x f$, což plyne z 1. základní věty analýzy. ⊞

Věta 18 (2. základní věta analýzy)**.** Pokud $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je její primitivní funkce, pak $\int_a^b f = F(b) - F(a) \overset{\text{znač.}}{=} F|_a^b$.

Důkaz. Nechť $D = (d_0, \ldots, d_k)$ je libovolné dělení $[a, b]$. $F(a_i) - F(a_{i-1}) = (a_i - a_{i-1}) f(c_i)$ pro nějaké $c_i \in [a_{i-1}, a_i]$ dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k} (F(a_i) - F(a_{i-1})) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) f(c_i)$$

To můžeme odhadnout jako $S(f, D) \geq \sum_{i=1}^k (a_i - a_{i-1}) f(c_i) \geq s(f, D)$. Tedy $F(b) - F(a) = \int_a^b f$ z integrovatelnosti f. ⊞

Důsledek 3 (Integrál pomocí primitivní funkce)**.** Je-li f spojitá na $[a, b]$, pak $f \in \mathcal{R}(a, b)$, f má primitivní funkci na $[a, b]$ a navíc $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Newtonův integrál

Definice 10 (Newtonův integrál)**.** Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci F a existují $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a^+), \lim_{x \to b^-} F(x) = F(b^-)$. Newtonův integrál f definujeme jako $(N) \int_a^b f = F(b^-) - F(a^+)$. Množinu funkcí, jež mají Newtonův integrál označíme $\mathcal{N}(a, b)$

Věta 19 (Porovnání Riemannova a Newtonova integrálu)**.**

1. $\mathcal{C}(a, b) \subset \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{R}(a, b)$, kde $\mathcal{C}(a, b)$ je množina spojitých funkcí na $[a, b]$.

2. Pokud $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{R}(a, b)$, pak se integrály rovnají.

3. Množiny $\mathcal{N}(a, b) \setminus \mathcal{R}(a, b), \mathcal{R}(a, b) \setminus \mathcal{N}(a, b)$ jsou neprázdné.

Důkaz.
1. Plyne ze známých vět

2. $\exists F(a^+), F(b^-), (R) \int_a^b f$. Pak $\int_a^b f \overset{\text{lin. RI}}{=} \int_a^{a+\delta} f + \int_{a+\delta}^{b-\delta} f + \int_{b-\delta}^b f \overset{\text{2. ZVA}}{=} \int_a^{a+\delta} f + F(b - \delta) - F(a + \delta) + \int_{b-\delta}^b f = \lim_{\delta \to 0^+} (\int_a^{a+\delta} f + F(b - \delta) - F(a + \delta) + \int_{b-\delta}^b f) \overset{\text{AL}}{=} \lim_{\delta \to 0^+} (F(b - \delta) - F(a + \delta)) = F(b^-) - F(a^+)$

3. V $\mathcal{R}(a,b) \setminus \mathcal{N}(a,b)$: $\operatorname{sgn}(x)$ na $(-1,1)$, v $\mathcal{N}(a,b) \setminus \mathcal{R}(a,b)$: $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\boxplus$

Věta 20 (Integrace per partes pro určitý integrál)**.** Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mají na $[a,b]$ spojité derivace f', g'. Pak

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Důkaz. „Urážka intelektu“ $\boxplus$

Aplikace určitého integrálu

Definice 11 (Neurčitý integrál)**.** Pokud $\forall b > a : f \in \mathcal{R}(a,b)$:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Tato limita může být i $\pm\infty$.

Věta 21 (Integrální kritérium konvergence)**.** Nechť $a \in \mathbb{Z}, f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná, nerostoucí. Pak

$$\sum_{i=a}^{\infty} f(i) \text{ konverguje} \Leftrightarrow \int_a^\infty f < \infty$$

Důkaz. Posloupnost částečných součtů je neklesající, tedy má limitu (vlastní, nebo $+\infty$).
Funkce je Riemannovsky integrovatelná na libovolném intervalu $(a,b) : b > a$ z monotonie, $F(b) := \int_a^b f(x)dx$ je neklesající, tedy limita v nekonečnu existuje, ale opět může být $+\infty$.

Mějme $b \in \mathbb{Z} : a < b$ a dělení $[a,b] : D = (a, a+1, \dots, b)$. Pak $s(f,D) = \sum_{i=a+1}^b f(i) \overset{(1)}{\leq} \int_a^b f(x) \overset{(2)}{\leq} S(f,D) = \sum_{i=a}^{b-1} f(i)$
Poté (1) implikuje „$\Leftarrow$“: $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \leq \lim_{b\to\infty} \sum_{i=a}^{b-1} f(i)$
Dále (2) implikuje „$\Rightarrow$“: $\lim_{b\to\infty} \sum_{i=a+1}^b f(i) \leq \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ $\boxplus$

Rozšíření faktoriálu

Věta 22 (O gamma funkci)**.** Funkce $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ splňuje na $[1,+\infty)$: $\Gamma(x+1) \overset{(*)}{=} x\Gamma(x), \Gamma(1) = 1$. Z těchto vlastností plyne $\Gamma(n) = (n-1)!$

Důkaz. Nejprve ukážeme korektnost definice - tj. $\Gamma(x)$ je reálné číslo $\forall x \in [1,+\infty)$. Zjevně $t^{x-1}e^{-t}, x > 1$ je nezáporná a spojitá na $(0,+\infty)$, tedy Riemannovsky integrovatelná na $[0,b]\forall b > 0$. Z nezápornosti je $F(b) := \int_0^b x^{t-1}e^{-t}dt$ neklesající funkce. Tedy $\lim_{b\to\infty} F(b)$ existuje, ale může být nekonečno - ukážeme, že není.
$\lim_{t\to\infty} e^{\frac{-t}{2}} t^{x-1} = 0$, tedy funkce musí být omezená: $\exists c_X \in \mathbb{R} : t^{x-1} \cdot e^{\frac{-t}{2}} < c_X \Rightarrow t^{x-1} \cdot e^{-t} < c_X \cdot e^{\frac{-t}{2}}$.

$$\int_0^b t^{x-1}e^{-t}dt \leq \int_0^b c_X e^{\frac{-t}{2}} dt = \frac{c_X(1 - e^{\frac{-b}{2}})}{2} < c_X$$

Tedy $\forall b : F(b)$ je shora omezená, tedy $\lim_b \to \infty F(b) \in \mathbb{R}$.
Dále mějme $f(t) := -t^x e^{-t}$:$[f(x)]_0^x = \lim_{b\to\infty}[f(x)]_0^b = \lim_{b\to\infty} f(b) - f(0) = \lim_{b\to\infty} b^x e^{-b} - 0 = 0$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt \overset{\text{p.p.}}{=} [-t^x e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1e^{-t}}dt = x\int_0^\infty t^{x-1e^{-t}}dt = x\Gamma(x)$$

$\boxplus$

Věta 23 (Délka křivky)**.** Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f' je spojitá na $[a, b]$. Pak

$$\operatorname{len}(\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Věta 24 (Objem rotačního tělesa)**.** Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(a, b), f \geq 0$ na $[a, b]$. Pak pro těleso $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$ platí $\text{Objem}(V) = \pi \cdot \int_a^b f(t)^2 dt$.

Analýza více proměnných

Definice 12 (Eukleidovská norma)**.** Eukleidovská norma vektoru je $\|\overline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, $\overline{0} = o$. Tato norma dále splňuje:

- $\|\overline{x}\| \geq 0$, rovnost nastane právě tehdy, když $\overline{x} = o$
- $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha|\|\overline{x}\|, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ (homogenita)
- $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Definice 13 (Eukleidovská vzdálenost)**.**
Eukleidovská vzdálenost je $d(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} - \overline{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$. Tato vzdálenost dále splňuje

- $d(\overline{x}, \overline{y}) \geq 0$, rovnost nastane právě tehdy, když $\overline{x} = \overline{y}$
- $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{y}, \overline{x})$ (symetrie)
- $d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(\overline{x}, \overline{z}) + d(\overline{z}, \overline{y})$ (trojúhelníková nerovnost)

Definice 14 (Otevřené okolí, otevřená množina)**.** Otevřené okolí bodu $x \in \mathbb{R}^m$ o poloměru $r > 0$ je $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m : d(x, y) < r\}$.
Množina $M \subseteq \mathbb{R}^m$ je otevřená právě tehdy, když $\forall x \in M : \exists r > 0 : B(x, r) \subset M$.

Vlastnosti otevřených množin:

- $\emptyset, \mathbb{R}^n$ jsou otevřené
- sjednocení otevřených množin (i nekonečně mnoha) je otevřená množina
- průnik dvou nebo konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina

Definice 15 (Spojitost, box, dělení boxu)**.** Nechť U je otevřené okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je spojitá v a, pokud $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
Vícerozměrný interval (box) je $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n], a_i < b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}$.
Objem I je $|I| = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$
Dělení boxu I je $D = \{[c_1^{j_1}, c_1^{j_1+1}] \times [c_2^{j_2}, c_2^{j_2+1}] \times \ldots \times [c_n^{j_n}, c_n^{j_n+1}] : (c_i^0 \ldots, c_i^{k_i})$ je dělení $[a_i, b_i] \wedge j_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\}$.

Definice 16 (Vícerozměrný Riemann)**.** Nechť $f : I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}^m, D$ je dělení I a $J \in D$. Pak definujeme $M(J) = \sup\limits_J f, m(J) = \inf\limits_J f$
Pak horní a dolní Riemannova suma jsou $S(f, D) = \sum\limits_{J \in D} |J| \cdot M(J)$, $s(f, D) = \sum\limits_{J \in D} |J| \cdot m(J)$.
Dále horní a dolní Riemannův integrál je $\overline{\int\limits_I} f = \inf\{S(f, D) : D \text{ dělení } I\}, \underline{\int\limits_I} f = \sup\{s(f, D) : D \text{ dělení } I\}$.
Pokud $\overline{\int\limits_I} f = \underline{\int\limits_I} f = c$, pak řekneme, že c je Riemannův integrál f na I, tedy $\int\limits_I f = c, f \in \mathcal{R}(I)$.

Věta 25 (Vícerozměrná Lebesgueova)**.** $f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow f$ je omezená na I a množina bodů nespojitosti f na I má nulovou míru.

Definice 17 (Nulová míra)**.** Množina $M \subseteq \mathbb{R}^m$ má nulovou míru, pokud $\forall\varepsilon > 0 \exists$ spočetně mnoho boxů $I_1, I_2, \ldots$ takových, že $\sum\limits_{i=1} |I_i| < \varepsilon \wedge M \subseteq \bigcup_{i=1} I_i$.

Věta 26 (Fubiniova)**.** Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m, Z = X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}, f : Z \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(Z)$. Pak

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f \right) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f \right)$$

Důkaz. Chceme $\int\limits_Z f = \int\limits_X \int\limits_Y f$, kde $Z = X \times Y$.
Máme dělení D boxu Z, které lze vyjádřit pomocí D_1 dělení X, D_2 dělení Y. Pak $D = \{J_1 \times J_2 : J_1 \in D_1, J_2 \in D_2\}$.
Z integrovatelnosti víme $\forall \varepsilon > 0 \exists D$ dělení $Z : \int\limits_Z f > s(f, D) > \int\limits_Z f - \varepsilon$.
Pak $s(f, D) = \sum\limits_{J \in D} |J| \cdot \inf\limits_J f = \sum\limits_{J_1 \in D_1, J_2 \in D_2} |J_1| \cdot |J_2| \cdot \inf\limits_{x \in J_1, y \in J_2} f(x, y) = \sum\limits_{J_1 \in D_1} |J_1| \sum\limits_{J_2 \in D_2} \cdot \inf\limits_{x \in J_1, y \in J_2} f(x, y) \leq \sum\limits_{J_1 \in D_1} |J_1| \inf\limits_{x \in J_1} \sum\limits_{J_2 \in D_2} \cdot \inf\limits_{y \in J_2} f(x, y) \leq \sum\limits_{J_1 \in D_1} |J_1| \cdot \int\limits_{x \in J_1} F(x) = s(F, D_1)$.
Tedy $s(F, D_1) \geq s(f, D) > \int\limits_Z f - \varepsilon$. Analogicky provedeme horní Riemannovu sumu, tedy $\int\limits_X F(x) = \int\limits_X \int\limits_Y f = \int\limits_Z f$ ⊞

Důsledek 4. Pokud $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n], f : I \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I)$. Pak

$$\int_I f = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_m) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_m$$

Definice 18 (Charakteristická funkce)**.** Pro $M \subseteq \mathbb{R}^2$ definujeme tzv. charakteristickou funkci

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \notin M \end{cases}$$

Definice 19 (Derivace ve směru)**.** Nechť $f : U \to \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^m$ je otevřené okolí $a \in \mathbb{R}^m$. Pak derivace f v bodě a ve směru $v \in \mathbb{R}^m, v \neq o$ je číslo $D_v f(a) := \lim\limits_{T \to 0} \frac{f(a - vT) - f(a)}{T}$ pokud existuje.

Definice 20 (Parciální derivace)**.** Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i}(a)$.

Definice 21 (Gradient)**.** Gradient je vektor parciálních derivací: $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$

Definice 22 (Diferencovatelná funkce, totální diferenciál)**.** Řekneme, že f je v a diferencovatelná, pokud má v a tzv. totální diferenciál $Df(a)$, což je lineární zobrazení takové, že $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \dfrac{\|f(a + h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0$

Věta 27 (Diferenciál $\Rightarrow$ parciální derivace)**.** Nechť $f : U \to \mathbb{R}, U$ je otevřené okolí $a \in \mathbb{R}^m$ a f je diferencovatelná v a. Pak všechny parciální derivace existují a navíc $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$. Navíc všechny směrové derivace existují a $\forall v \neq o : D_v f(a) = Df(a)(v)$.

Důkaz. Máme $e_1, \ldots, e_m, h = h_1 e_1 + \ldots + h_m e_m$
$L(h) = L(h_1 e_1 + \ldots + h_m e_m) \overset{\text{linearita}}{=} h_1 L(e_+) + \ldots + h_m L(e_m)$. Stačí ukázat, že $L(e_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Z definice totálního diferenciálu volbou $h = t \cdot e_i$ dostaneme $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\|f(a + te_i) - f(a) - L(te_i)\|}{\|t \cdot e_i\|} = 0$, tedy $\lim\limits_{t \to 0} \left| \dfrac{f(a + te_i) - f(a)}{t} - \dfrac{t \cdot L(e_i)}{t} \right| = 0$. Dále $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \dfrac{(a + te_i) - f(a)}{t} = \frac{L(e_i)}{t}$ - máme první část.
Dále $0 = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\|f(a + tv) - f(a) - L(tv)\|}{\|t \cdot v\|} = \lim\limits_{t \to 0} \left| \dfrac{f(a + tv) - f(a)}{t \cdot \|v\|} - \frac{L(v)}{\|v\|} \right| \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + tv) - f(a)}{t} = L(v)$.
⊞

Věta 28 (Vlastnosti diferenciálu)**.** Nechť $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n, a \in U, U \subset \mathbb{R}^m$ otevřená. Pak

- $Df(a)$ je jednoznačný, pokud existuje
- $Df(a)$ existuje $\Leftrightarrow$ existuji diferenciály všech jednotlivých funkcí.
- Diferencovatelnost v a $\Rightarrow$ spojitost v a

Definice 23 (Graf)**.** Graf $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$.

Věta 29 (Parciální derivace $\Rightarrow$ totální diferenciál)**.** Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená, $a \in U$. Pokud $f : U \to \mathbb{R}$ má na U všechny parciální derivace a ty jsou navíc v a spojité, potom je f diferencovatelná v a.

Důkaz. Pro $m = 2$. BÚNO $a = (0, 0), r > 0$ t.ž. $B(a, r) \subseteq U$. Vezmu $h = (h_1, h_2), h' = (h_1, 0), |h_1|, |h_2| < r$.
Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě: $f(h) - f(o) = f(h) - f(h') + f(h') - f(o) \underset{\exists c_1 \in (0,h_1)}{\overset{\exists c_2 \in (0,h_2)}{=}} \frac{\partial f}{\partial x}(h_1, x_2) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial y}(c_1, 0) \cdot h_1$.
Z toho plyne, že $L(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(o)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(o)h_2$ je kandidát na totální diferenciál v o.
Ověříme totální diferencialitu a existenci:
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|h\| < \delta \Rightarrow \varepsilon > \frac{|f(h) - f(o) - L(h)|}{\|h\|} = \dfrac{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(h_1, c_2) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, 0) \cdot h_1 - \frac{\partial f}{\partial x}(o) \cdot h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(o) \cdot h_2\right|}{\|h\|} \overset{\triangle \text{ nerovnost}}{\leq}$
$\dfrac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(o)\right| \cdot |h_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(h_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(o)\right| \cdot |h_2|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon'|h_1|}{\|h\|} + \frac{\varepsilon'|h_1|}{\|h\|} \leq \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$.
Ze spojitosti parciálních derivací v o máme $\forall \varepsilon' > 0 \exists \delta > 0 : \|u\| < \delta$. Pak $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(u) - \frac{\partial f}{\partial y}(o)\right| < \varepsilon'$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(u) - \frac{\partial f}{\partial x}(o)\right| < \varepsilon'$ ⊞

Věta 30 (Lagrangeova o střední hodnotě více proměnných)**.** Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^m$ je otevřená, $s = \overline{ab}$ je úsečka v U a $f : U \to \mathbb{R}$ je spojitá v každém bodě s a diferencovatelná v každém vnitřním bodě s. Pak $\exists$ vnitřní bod $s : \zeta$ takový, že $f(b) - f(a) = Df(\zeta)(b - a)$

Důkaz. Volíme $F(t) = f(a + t(b - a))$, aplikuji Lagrange jedné proměnné, $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$. ⊞

Definice 24 (Souvislost množiny)**.** Otevřená množina $S \subseteq \mathbb{R}^m$ je souvislá, pokud každé dva její body lze spojit lomenou čarou $s = s_1, \ldots, s_r : s_i = \overline{a_i b_i}, b_i = a_{i+1}, s \subseteq S$.

Věta 31 (Nulový diferenciál $\Rightarrow$ f konstantní)**.** Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^m$ a $f : U \to \mathbb{R}$ má v každém bodě U nulový totální diferenciál. Pak f je konstantní na U. Totéž platí, pokud má f na U všechny derivace nulové.

Důkaz. Vezmeme libovolné $a, b \in U$. Ukážeme, že $f(a) = f(b)$. Ze souvislosti $U \exists$ s lomená čára: $s = s_1 \ldots s_r \subseteq U, a = a_1, b = b_r$. Vezmu s_i. Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě $\forall i \in [r] \exists \zeta \in s_i : f(b_i) - f(a_i) = Df(\zeta)(b_i - a_i) \overset{\text{předpoklad}}{=} 0 \Rightarrow f(b_i) = f(a_i) \overset{\text{tranzitivita}}{\Rightarrow} f(a) = f(b)$.
Druhá část: Z nulovosti (a tedy spojitosti parciálních derivací) na U plyne existence diferenciálu na U. Diferenciál je jednoznačně určen parciálními derivacemi, tedy musí být nulový, tedy všechny parciální derivace nulové implikují splnění podmínky první části. ⊞

Věta 32 (Aritmetika parciálních derivací a totálního diferenciálu)**.** Nechť $f, g : U \to \mathbb{R}, a \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, U$ otevřená.
Pokud $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ a $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$, nebo $Df(a), Dg(a)$ existují, pak
1. $\dfrac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i} = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$.
1'. $F(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha Df(a) + \beta Dg(a)$
2. $\dfrac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(a) = f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a) + g(a) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$
2'. $D(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot Df(a) + g(a) + Df(a)$
3. Pokud $g(a) \neq 0 : \dfrac{\partial \left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(a) = \dfrac{g(a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{g^2(a)}$.
3'. Pokud $g(a) \neq 0 : D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g^2(a)} \cdot (g(a)Df(a) - f(a)Dg(a))$.

Věta 33 (Totální diferenciál složené funkce)**.** Nechť $f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}^k, U \subset \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřené, $a \in U, f(a) = b \in V$. Pokud f je diferencovatelná v b, pak $D(g \circ f)(a)$ existuje a je roven $Dg(f(a)) \circ Df(a)$.

Definice 25 (Parciální derivace k-tého řádu)**.** Pokud f má parciální derivaci $k-1$. řádu podle $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ na okolí a ,tedy $\exists F(x) = \dfrac{\partial^{k-1} F}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(x)$, definujeme parciální derivaci k-tého řádu podle x_{i_k} v a jako $\dfrac{\partial^k F}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(a) = \dfrac{\partial F}{\partial x_{i_k}}(a)$.

Věta 34 (Obvykle nezáleží na pořadí parciálních derivací)**.** Nechť $f_a : U \to \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřená, f má parciální derivace druhého řádu $\partial_i \partial_j f, \partial_j \partial_i f, i \neq j$ na U, navíc spojité v a. Pak $\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a)$

Důkaz. Jen pro $m = 2$. BÚNO $a = (0.0), i = 1, j = 2$.
Pokud $\forall h > 0 \exists \sigma, \tau \in [0, h]^2$ takové, že $\partial_1 \partial_2 f(\sigma) = \partial_2 \partial_1 f(\tau)$, pak ze spojitosti derivací druhého stupně v o limitním přechodem dostaneme $\partial_1 \partial_2 f(o) = \partial_2 \partial_1 f(o)$ - limitním přechodem myslíme: $h \to 0$, tedy $\sigma\tau \to o$.
Nyní zkonstruujeme σ, τ: mějme pomocné funkce $\varphi(t) = f(t, h) - f(t, 0), \varphi'(t) = \partial_1 f(t, h) - \partial_1 f(t, 0), \psi(t) = f(h, t) - f(0, t), \psi'(t) = \partial_2 f(h, t) - \partial_2 f(0, t)$

$$\varphi(h) - \varphi(0) = f(h, h) - f(h, 0) - f(0, h) + f(0, 0) = R \underset{\exists s_0 \in (0,h)}{\overset{\text{Lagrange}}{=}} h\varphi'(s_0) = h(\partial_1 f(s_0, h) - \partial_1 f(s_0, 0))$$
$$\underset{\exists t_1 \in (0,h)}{\overset{\text{Lagrange}: g_1(t) = \partial_1 f(s_0, t)}{=}} h^2 \partial_2 \partial_1 f(s_0, t_1)$$
$$\psi(h) - \psi(0) = f(h, h) - f(0, h) - f(h, 0) + f(0, 0) = R \underset{\exists t_0 \in (0,h)}{\overset{\text{Lagrange}}{=}} h\psi'(t_0) = h(\partial_2 f(h, t_0) - \partial_2 f(0, t_0))$$
$$\underset{\exists s_1 \in (0,h)}{\overset{\text{Lagrange}: g_2(s) = \partial_1 f(s, t_0)}{=}} h^2 \partial_1 \partial_2 f(s_1, t_0)$$

Tedy volím $\sigma = (s_1, t_0), \tau = (s_0, t_1)$. ⊞

Definice 26 (Množina funkcí se všemi ∂ k-tého řádu spojitými)**.** $\mathcal{C}^k(U)$ je množina funkcí na U, které mají všechny parciální derivace řádu $\leq k$ spojité na U.

Důsledek 5. Pro $f \in C^k(U)$ nezáleží na pořadí proměnných u parciálních derivací řádu $\leq k$.

Definice 27 (Extrémy)**.** Nechť $f : U \to \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^m, a \in U$. Pak řekneme, že f má v a

- ostré lokální maximum, pokud $\exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta : f(x) < f(a)$
- lokální maximum, pokud $\exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta : f(x) \leq f(a)$
- ostré lokální minimum, pokud $\exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta : f(x) > f(a)$
- lokální minimum, pokud $\exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta : f(x) \geq f(a)$
- ostré globální maximum, pokud $\forall x \in U \setminus \{a\} : f(x) < f(a)$
- globální maximum, pokud $\forall x \in U \setminus \{a\} : f(x) \leq f(a)$
- ostré globální minimum, pokud $\forall x \in U \setminus \{a\} : f(x) > f(a)$
- globální minimum, pokud $\forall x \in U \setminus \{a\} : f(x) \geq f(a)$

Věta 35 (Lokální extrémy)**.** Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^m, a \in U$. Pokud $f : U \to \mathbb{R}$ má lokální extrém v a, pak $\forall i \in [m]$ buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ nebo neexistuje.

Důkaz. Zadefinujeme $g_i(t) := f(a + te_i)$. Pokud f má lokální extrém v a, pak $\forall i$ platí, že g_i má lokální extrém v 0. Ze zimního semestru: $g_i'(0) = 0$ nebo neex, a $g'i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pokud existuje. ⊞

Definice 28 (Hessova matice)**.** Hessova matice je $H_f = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^m$.

Věta 36 (Lokální extrémy II.)**.** Nechť $f \in \mathcal{C}^k(U), U \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřená, $a \in U, \nabla f(a) = o$. Pak

1. Pokud je $H_f(a)$ pozitivně nebo negativně definitní, pak f má v a ostré lokální minimum nebo maximum.

2. Pokud je $H_f(a)$ indefinitní, f nemá v a lokální extrém (ani neostrý).

Fakt 4 (Kompaktnost na $\mathbb{R}^m$)**.** $M \subseteq \mathbb{R}^m$ je kompaktní, pokud je uzavřená a omezená (tj. $\exists r > 0 : M \subseteq B(o, r)$).

Věta 37 (Extrémy na kompaktu)**.** Pokud $M \subseteq \mathbb{R}^m$ je kompaktní, neprázdná, $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá, pak f nabývá na M extrémy.

Věta 38 (Věta o implicitní funkci)**.** Nechť $F : W \to \mathbb{R}, W \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ je otevřené okolí bodu (x_0, y_0), kde $F(x_0, y_0) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^m, y_0 \in \mathbb{R}, F \in \mathcal{C}^p(W), p \geq 1, \dfrac{\partial F(x_0, y)}{\partial y} \neq 0$. Pak $\exists$ otevřené okolí U bodu x_0, V otevřené okolí bodu y_0 takové, že $\exists f : U \to V, F(x, f(x)) = 0 \forall x \in U, f \in C^p(U) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, x \in U, i \in [n]$.

Věta 39 (Věta o implicitních funkcích)**.** Nechť $W \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ je otevřené okolí $(x_0, y_0), x_0 \in \mathbb{R}^m, y_0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $F = (F_1, \dots, F_n) : W \to \mathbb{R}^n$ splňuje

1. $F_i \in C^p(W), p \geq 1, \forall i \in [n]$
2. $F_i(x_0, y_0) = 0 \forall i \in [n]$
3. $\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \neq 0$

Pak $\exists$ otevřené okolí U bodu x_0 a otevřené okolí V bodu y_0 takové, že $\forall x \in U \exists! y \in V : F(x, y) = o(\Leftrightarrow F_i(x, y) = 0 \forall i \in [n])$. TODO - nějaká divná poznámka.

Věta 40 (Lagrangeovy multiplikátory)**.** Nechť $f, F_1, \dots, F_n : U \to \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřená, $n < m$. Dále nechť $H = \{x \in U : F_i(x) = 0 \forall i \in [n]\}$ a $a \in H$. Pak pokud $\nabla F_i(a)$ jsou lineárně nezávislé a $\nabla f(a)$ není jejich lineární kombinací, pak a není lokální extrém f na H.

Důsledek 6 (Podezřelé body z extremity)**.** Body, kde je potřeba hledat extrém jsou dvou typů

- $\nabla F_i(a)$ jsou lineárně závislé
- existují tzv. Lagrangeovy multiplikátory (tj. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \nabla f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla F_i(a)$).

Metrické a topologické prostory

Definice 29 (Metrický prostor)**.** Metrický prostor je dvojice (M, d), kde

- $M \neq \emptyset$
- $d : M^2 \to \mathbb{R}$ je metrika.

Definice 30 (Otevřená koule, otevřená a uzavřená množina)**.** Otevřená koule se středem $a \in \mathbf{M}$ o poloměru $r > 0$ je $B(a, r) = \{x \in M : d(a, x) < r\}$.
$A \subseteq M$ je otevřená, pokud $\forall a \in A \exists r > 0 : B(a, r) \subset A$.
$A \subseteq M$ je uzavřená, pokud $M \setminus A$ je otevřená.

Definice 31 (Limita posloupnosti, konvergence)**.** Posloupnost $(a_n) \subset M$ má limitu $a \in M$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(a_n, a) < \varepsilon$.
Posloupnost je dále konvergentní, pokud má limitu.

Definice 32 (Kompaktní, omezená množina)**.** Množina A je kompaktní, pokud $A \subseteq M, \forall$ posloupnost $(a_n) \subset A$ má konvergentní podposloupnost s limitou v A.
Množina $A \subseteq M$ je omezená, pokud $\exists a \in M, r > 0$ t.ž. $A \subseteq B(a, r)$.

Věta 41 (Charakterizace uzavřené množiny)**.** $A \subset M$ je uzavřená v $M \Leftrightarrow$ limita každé konvergentní posloupnosti $(a_n) \subseteq A$ leží v A.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: pro spor existuje konvergentní posloupnost s limitou mimo A a A je uzavřená. Tedy $M \setminus A$ je otevřená, $\lim a_n = a \in M \setminus A \Rightarrow \exists r > 0 : B(a, r) \subseteq M \setminus A \Rightarrow B(a, r) \cap (a_n) = \emptyset \Rightarrow d(a_n, a) \geq r \Rightarrow \lightning$
„$\Leftarrow$“ sporem: A není uzavřená, tedy $M \setminus A$ není otevřená, tedy $\exists a \in M \setminus A : \forall r > 0 : B(a, r) \not\subseteq M \Leftrightarrow B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Zkonstruujeme posloupnost $(a_n) \subseteq A : a_n \in A \cap B\left(a, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim a_n = a \Rightarrow \lightning$ ⊞

Věta 42 (Kompaktnost $\Rightarrow$ uzavřenost a omezenost)**.** Každá kompaktní množina v metrickém prostoru je uzavřená a omezená.

Důkaz sporem. Nechť $A \subseteq M$ je kompaktní.
a) A není uzavřená. Pak $\exists (a_n) \subset A : \lim a_n = a \notin A$. Každá podposloupnost a_n má také limitu $a \in A \Rightarrow \lightning$
b) A není omezená: vezmeme a_1 libovolné z A, víme, že $\forall r > 0 : A \not\subseteq B(a_1, r)$. Konstruujeme induktivně: předpokládejme, že jsme už zkonstruovali $a_1, \ldots, a_k$. Vezměme r t.ž. $a_1, \ldots, a_k \in B(a_1, r)$. Pak zvolíme $a_{k+1} \in A \setminus B(a_1, r + 1)$. Z konstrukce plyne $d(a_i, a_j) > 1 \forall i, j : i \neq j$, tedy neexistuje konvergentní podposloupnost, tedy spor. ⊞

Věta 43 (Uzavřenost a omezenost $\Rightarrow$ kompaktnost na $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrikou)**.** Každá uzavřená a omezená množina v metrickém prostoru je v $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrickou kompaktní.

Definice 33 (Topologický prostor)**.** Topologický prostor je dvojice (X, τ) taková, že

- X je množina
- $\tau \subseteq 2^X$ je topologie splňující
  1. $\emptyset, X \in \tau$
  2. sjednocení libovolného podsystému $\tau \in \tau$
  3. konečný průnik libovolného podsystému $\tau \in \tau$.

Definice 34 (Metrická a topologická spojitost)**.** Nechť $(M, d), (N, e)$ jsou metrické prostory. Pak $f : M \to N$ je spojité, pokud $\forall a \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall b \in M : d(a, b) < \delta \Rightarrow e(f(a), f(b)) < \varepsilon$.
Nechť $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{U})$ jsou topologické prostory. Pak $f : X \to Y$ je spojité, pokud $\forall B \in \mathcal{U}$ platí, že $f^{\langle -1 \rangle}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \in \mathcal{T}$

Věta 44 (Spojitá funkce nabývá extrémů na kompaktu)**.** Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá, $A \subseteq M$ je kompaktní, neprázdná. Pak f nabývá na A minimum a maximum.

Seznam témat

1	Definice (Primitivní funkce)	1
1	Věta (Množina primitivních funkcí)	1
2	Věta (Linearita primitivních funkcí)	1
3	Věta (Spojitá funkce má primitivní funkci)	1
4	Věta (Funkce s primitivní funkci má Darbouxovu vlastnost)	1
5	Věta (Spojitost primitivní funkce)	1
6	Věta (Integrace per partes)	1
7	Věta (První věta o substituci)	1
8	Věta (Druhá věta o substituci)	2
2	Definice (Racionální funkce)	2
9	Věta (Primitivní funkce racionálních funkcí (!δ)))	2
1	Fakt (Eukleidův algoritmus dělení polynomů)	2
2	Fakt ($Q(x)$ je součin polynomů nejvýše druhého stupně)	2
3	Fakt (Rozklad na parciální zlomky)	2
3	Definice (Dělení intervalu, norma dělení)	2
4	Definice (Riemannova suma, Riemannův integrál)	2
	Poznámka (Zápis Riemannova integrálu, třída Riemannovsky integrovatelných funkcí)	2
5	Definice (Horní a dolní sumy a integrály)	2
6	Definice (Darbouxova ekvivalentní definice Riemannova integrálu)	2
7	Definice (Zjemnění dělení)	2
1	Lemma (Riemannovy sumy a zjemnění)	2
1	Důsledek (Horní, dolní integrál a dvě různá dělení)	3
10	Věta (Dolní RI je nejvýše horní RI)	3
11	Věta (Kritérium integrovatelnosti)	3
12	Věta (Monotonie implikuje integrovatelnost)	3
8	Definice (Stejnoměrná spojitost)	3
13	Věta (Na kompaktu spojitost = stejnoměrná spojitost)	3
14	Věta (Spojitost implikuje integrovatelnost)	4
15	Věta (Linearita Riemannova integrálu)	4
16	Věta (Lebesgueova charakterizace integrovatelných funkcí (!∂))	4
9	Definice (Nulová Lebesgueova míra)	4
1	Příklad (Množiny (ne)nulové míry)	4
17	Věta (1. základní věta analýzy)	4
2	Důsledek (Spojitá funkce má primitivní funkci)	5
18	Věta (2. základní věta analýzy)	5
3	Důsledek (Integrál pomocí primitivní funkce)	5
10	Definice (Newtonův integrál)	5
19	Věta (Porovnání Riemannova a Newtonova integrálu)	5
20	Věta (Integrace per partes pro určitý integrál)	6
11	Definice (Neurčitý integrál)	6
21	Věta (Integrální kritérium konvergence)	6
22	Věta (O gamma funkci)	6
23	Věta (Délka křivky)	7

24 Věta (Objem rotačního tělesa) 7
12 Definice (Eukleidovská norma) 8
13 Definice (Eukleidovská vzdálenost) 8
14 Definice (Otevřené okolí, otevřená množina) 8
15 Definice (Spojitost, box, dělení boxu) 8
16 Definice (Vícerozměrný Riemann) 8
25 Věta (Vícerozměrná Lebesgueova) 8
17 Definice (Nulová míra) 8
26 Věta (Fubiniova) 8
4 Důsledek 9
18 Definice (Charakteristická funkce) 9
19 Definice (Derivace ve směru) 9
20 Definice (Parciální derivace) 9
21 Definice (Gradient) 9
22 Definice (Diferencovatelná funkce, totální diferenciál) 9
27 Věta (Diferenciál $\Rightarrow$ parciální derivace) 9
28 Věta (Vlastnosti diferenciálu) 9
23 Definice (Graf) 10
29 Věta (Parciální derivace $\Rightarrow$ totální diferenciál) 10
30 Věta (Lagrangeova o střední hodnotě více proměnných) 10
24 Definice (Souvislost množiny) 10
31 Věta (Nulový diferenciál $\Rightarrow f$ konstantní) 10
32 Věta (Aritmetika parciálních derivací a totálního diferenciálu) 10
33 Věta (Totální diferenciál složené funkce) 10
25 Definice (Parciální derivace k-tého řádu) 11
34 Věta (Obvykle nezáleží na pořadí parciálních derivací) 11
26 Definice (Množina funkcí se všemi $\partial\, k$-tého řádu spojitými) 11
5 Důsledek 11
27 Definice (Extrémy) 11
35 Věta (Lokální extrémy) 11
28 Definice (Hessova matice) 11
36 Věta (Lokální extrémy II.) 11
4 Fakt (Kompaktnost na $\mathbb{R}^m$) 12
37 Věta (Extrémy na kompaktu) 12
38 Věta (Věta o implicitní funkci) 12
39 Věta (Věta o implicitních funkcích) 12
40 Věta (Lagrangeovy multiplikátory) 12
6 Důsledek (Podezřelé body z extremity) 12
29 Definice (Metrický prostor) 12
30 Definice (Otevřená koule, otevřená a uzavřená množina) 12
31 Definice (Limita posloupnosti, konvergence) 12
32 Definice (Kompaktní, omezená množina) 13
41 Věta (Charakterizace uzavřené množiny) 13
42 Věta (Kompaktnost $\Rightarrow$ uzavřenost a omezenost) 13
43 Věta (Uzavřenost a omezenost $\Rightarrow$ kompaktnost na $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrikou) 13
33 Definice (Topologický prostor) 13
34 Definice (Metrická a topologická spojitost) 13
44 Věta (Spojitá funkce nabývá extrémů na kompaktu) 13