Poznámky - matematická analýza III

Petr Chmel, ZS 2018/19

Definice 1 (Komplexní čísla)**.** Množinou komplexních čísel $\mathbb{C}$ rozumíme množinu $\mathbb{R}^2$. Prvky $\mathbb{C}$ jsou (a, b)...$a + ib$.

Věta 1 (Základní věta algebry)**.** Každý polynom stupně alespoň 1 s koeficienty v $\mathbb{C}$ má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Definice 2 (Komplexní funkce reálné proměnné)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Pak komplexní funkcí reálné proměnné rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$.

Věta 2 (Odhad integrálu)**.** Nechť f je spojitá funkce $[a, b] \to \mathbb{C}$. Potom

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Důkaz. Druhá nerovnost je zřejmá.
První: $|z + w| \leq |z| + |w|$. Z indukce pak $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|$.
Vezmu $\varepsilon > 0$. Najdu dělení $D : I_1, \dots, I_n$ s body $x_1, \dots, x_n$ takové, že:

- $\left|\int\limits_a^b \Re(f(x))\ \mathrm{d}x - \sum\limits_{j=1}^{n} |I_j| \cdot \Re(f(x_j))\right| < \varepsilon$
- $\left|\int\limits_a^b \Im(f(x))\ \mathrm{d}x - \sum\limits_{j=1}^{n} |I_j| \cdot \Im(f(x_j))\right| < \varepsilon$
- $\left|\int\limits_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x - \sum\limits_{j=1}^{n} |I_j| \cdot |f(x_j)|\right| < \varepsilon$

Z prvních dvou nerovností plyne $\left|\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \sum\limits_{j=1}^{n} |I_j| \cdot f(x_j)\right| < \sqrt{2}\varepsilon$ Dále označíme $X = \int\limits_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x, Y = \sum\limits_{j=1}^{n} |I_j| \cdot |f(x_j)|, U = \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x, V = \sum\limits_{j=1}^{n} |I_j| \cdot f(x_j)$
Pak $|U| = |U + V| + |V| \leq \sqrt{2}\varepsilon + |X| \leq \sqrt{2}\varepsilon + |Y - X| + |X| \leq (\sqrt{2} + 1)\varepsilon + X$. ⊞

Definice 3 (Derivace komplexní funkce komplexní proměnné)**.** Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné. Potom derivací funkce f v bodě a rozumíme $f'(a) = \lim_{z\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{z - a}$, pokud limita existuje.

Věta 3 (Cauchy-Riemannovy podmínky)**.** Nechť $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, f$ je funkce na okolí z. Pak $f'(z)$ existuje $\Leftrightarrow$ $f_1 = \Re(f), f_2 = \Im(f)$ mají v z totální diferenciál a $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \wedge \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = A = B + Ci$.
Tedy $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - A = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)-Ah}{h} = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|f(z+h)-f(z)-Ah|}{h} = 0 \overset{h=h_1+ih_2}{\Rightarrow}$ $\lim_{h\to 0} \frac{|f_1(z+h)-f_1(z)-Bh_1+Ch_2|}{h} = 0 \wedge \lim_{h\to 0} \frac{|f_2(z+h)-f_2(z)-Ch_1+Bh_2|}{h} = 0$, tedy totální diferenciály existují a $Df_1 = (B, -C), Df_2(C, B)$.
„$\Leftarrow$“: „Jde se opačně“: TODO ⊞

Definice 4 (Holomorfní, celá funkce)**.** Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená. Pak funkci f takovou, že $f'(z)$ existuje na celém Ω nazveme holomorfní na Ω.
Pokud $M \subseteq \mathbb{C}$, pak f nazveme holomorfní na M, pokud existuje $\Omega \supset M : \Omega$ je otevřená a g je holomorfní na Ω.
Pokud f je holomorfní na $\mathbb{C}$, nazveme ji celou funkcí.

Definice 5 (Exponenciální funkce na komplexních číslech)**.**
Nechť $ai + b = z \in \mathbb{C}$. Pak $\mathrm{Exp}(z) = e^z = e^a(\cos b + i \cdot \sin n)$.

Pozorování (Celost exponenciály)**.** e^z je celá funkce

Důkaz. $\Re(e^z) = e^a \cos b = f_1(a, b), \Im(e^z) = e^a \sin b = f_2(a, b)$ - f_1, f_2 mají totální diferenciál na $\mathbb{R}^2$.
$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = e^{x_1} \cdot \cos(x_2), \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = -e^{x_1} \cdot \sin(x_2), \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = e^{x_1} \cdot \sin(x_2), \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = e^{x_1} \cdot \cos(x_2)$

⊞

Poznámka (Vzorce pro derivaci v $\mathbb{C}$)**.** Základní vzorce pro derivaci součtu, součinu, složené funkce a inverzní funkce platí i v $\mathbb{C}$.

Poznámka (Vlastnosti exponenciály)**.** Pro $z, w \in \mathbb{C}$:
$e^{z+w} = e^z e^w$
$e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$
$|e^z| = e^{\Re(z)}$
$(e^z)' = e^z$

Věta 4 (O obrazu $\mathbb{C}$ exponenciálou)**.** e^z zobrazuje $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Důkaz.
1. $e^z \neq 0 : e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^a(\cos b + i \sin b) : e^a \neq 0 \wedge \forall b \in \mathbb{R} : \cos b \neq 0 \vee \sin b \neq 0 \Rightarrow$ alespoň jedna složka součtu je nenulová, tedy i součin je nenulový.
2. $z \neq 0 : z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = e^{\log(r) + i\varphi} \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\, \exists x \in \mathbb{C} : e^x = z$.

⊞

Definice 6 (Komplexní logaritmus)**.** Jako $\ln x$ označujeme reálný logaritmus.
$\log(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \mathbb{C} : e^\omega = z\} = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = \ln|z| + i\varphi, \varphi \in \arg(z)\}$
$\mathrm{Log}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \omega \in \log(z) : \Im(\omega) \in [-\pi, \pi)$ - toto nazveme hlavní hodnotou logaritmu.

Definice 7 (Obecná mocnina a její množinová funkce)**.** Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. Pak $z^w \stackrel{\text{def}}{=} e^{w \cdot \mathrm{Log}}(z)$
$m_w(z) = \{e^{rw} : r \in \log(z)\}$

Pozorování. Prvky $m_w(z)$ leží na kružnici se středem v 0.

Definice 8 (Komplexní goniometrické funkce)**.** Nechť $z \in \mathbb{C}$: $\sin(z) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
$\cos(z) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
$\sinh(z) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$
$\cosh(z) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

Stejnoměrná konvergence

Definice 9 (Bodová a stejnoměrná konvergence)**.** Nechť M je množina, (Q, σ) je metrický prostor a $f, (f_n)_{n=1}^\infty$ jsou zobrazení $M \to Q$.
Pak řekneme, že f_n konverguje

- bodově k f na M, pokud $\forall x \in M : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, píšeme $f_n \to f$. Alternativně: $\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \sigma(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$
- stejnoměrně k f a M, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \forall x \in M : \sigma(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$, píšeme $f_n \rightrightarrows f$.

Definice 10 (Lokální stejnoměrná konvergence)**.** Nechť $(Q, \rho), (P, \sigma)$ jsou metrické prostory. Řekneme, že f_n konvergují lokálně stejnoměrně k f, pokud $\forall a \in Q \exists r$: na $B(a, r)$ $f_n \rightrightarrows f$. Značíme $f_n \stackrel{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$.

Věta 5 (Moore-Osgoodova: stejnoměrná konvergence a limita)**.** Nechť (P, σ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a není izolovaný, f_n s reálnými nebo komplexními hodnotami konvergují stejnoměrně k f na $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ pro nějaké $r > 0$.
Nechť $\forall n \in \mathbb{N} : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_n$. Potom existují $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Navíc, tyto limity si jsou rovny.

Důkaz. Vezmu $\varepsilon > 0$.
1. Volím n_O tak, aby $\forall n > n_0$ a $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} : |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Tedy $\forall m, n > n_0 : \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Dále vezmu $m, n > n_0$. $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_m(x) = a_m$. Najdu $r_n < r$ tak, aby $x \in B(x_0, r_n) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{4}$, analogicky $r_m : x \in B(x_0, r_m) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f_m(x) - a_m| < \frac{\varepsilon}{4}$.
Nyní vezmu $x \in B(x_0, \min\{r_m, r_n\}) \setminus \{x_0\}$. Pak $|a_n - a_m| \leq |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| < \varepsilon$.
Tedy (a_n) je Cauchyovská a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ existuje.
2. Chceme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$
Vezmu $\varepsilon > 0$: najdeme $n_0 : \forall n > n_0 \forall x \in B(x, r) \setminus \{x_0\} : |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Dále najdeme $n_1 : \forall n > n_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4}$. Vezmeme $n > \max\{n_0, n_1\}$ a to zafixujeme. Pak najdeme $r_1 : \forall x \in B(x_0, r_1) \setminus \{x_0\} : |f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{4}$. Nakonec vezmeme $r_2 = \min\{r, r_1\}$. Pak $\forall x \in B(x_0, r_2) \setminus \{x_0\} :$ $|f(x) - a| \leq |f(x) - f_n(x) + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a| < \varepsilon$. ⊞

Věta 6 (Stejnoměrná konvergence a spojitost)**.** Nechť $(P, \rho), (Q, \sigma)$ jsou metrické prostory, f_n jsou spojitá zobrazení $P \to Q$ a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ Pak f je spojitá.

Důkaz. Vezmeme $x_0 \in P$. Pokud x_0 je izolovaný, f je spojitá v x_0.
Nechť x_0 není izolovaný. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = f_N(x_0)$ a $\exists r > 0$ takové, že na $B(x_0, r) : f_n \rightrightarrows f$.
Vezmeme $\varepsilon > 0, n_0$ tak, že $\forall n > n_0 : \forall x \in B(x_0, r) : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (stejnoměrná konvergence)
Najdeme n_1 tak, že $\forall n > n_1 : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (stejnoměrná konvergence v bodě)
Fixujeme $n > \max\{n_0, n_1\}$ a najdeme $r_1 : 0 < r_1 < r$ tak, že $\forall x \in B(x_0, r_1) : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
Pak pro n a $x \in B(x_0, r_1) : |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. ⊞

Věta 7 (Stejnoměrná konvergence a integrál)**.** Nechť $[a, b]$ je uzavřený interval a f_n jsou spojité reálné funkce na $[a, b]$. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.
Potom $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Důkaz. 1. Z předchozí věty je f spojitá, tedy má Riemannův integrál.
2. Fixujeme $\varepsilon > 0$, najdu dělení D intervalu $[a, b]$ tak, že $|S(f, D) - s(f, D)| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow s(f, D) \leq \int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = I_1 \leq S(f, D)$.
Pokud $\forall x \in [a, b] : f(x) - f_n(x) < \nu$, pak $\forall I \in D : |\sup_I f(x) - \sup_I f_n(x)| < \nu$.
Pak $S(f, D) - S(f_n, D) < \nu \cdot (b - a)$. Najdu $n_0 : \forall n > n_0 : \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.
Pro takové $n : s(f, D) - \frac{\varepsilon}{3} < s(f_n, D) \leq \int\limits_a^n f_n(x) \, \mathrm{d}x = I_2 \leq S(f_n, D) < S(f, D) + \frac{\varepsilon}{3}$.
Tedy $I_1, I_2 \in (s(f, D) - \frac{\varepsilon}{3}, s(f, D) + \frac{\varepsilon}{3})$, a tedy $||$ ⊞

Věta 8 (Stejnoměrná konvergence a derivace)**.** Nechť (a, b) je omezený otevřený interval, f_n je posloupnost reálných funkcí $[a, b] \to$ někam. Nechť f'_n jsou spojité $\forall n$ a $f'n \rightrightarrows g$ na (a, b). Nechť $\exists x_0 \in (a, b)$ takové, že $f_n(x_0)$ je konvergentní.
Pak existuje reálná funkce g taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) a f' existuje na (a, b) a $f' = g$.

Důkaz. Položíme $f(x) = \int\limits_{x_0}^x g(y) \, \mathrm{d}y + A$. G je spojitá, tedy existuje integrál a $A = \lim f_n(x_0)$.
Pak $f'(x) = g(x)$ a máme $f_n(x) = \int\limits_{x_0}^x f'_n(y) \, \mathrm{d}y + f(x_0)$.
Ukážeme, že $f_n(x) \to f(x)$.

$\lim(\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(y)\ \mathrm{d}y + f(x_0)) = \int\limits_{x_0}^{x} \lim(f_n'(y))\ \mathrm{d}y + \lim f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} g(y)\ \mathrm{d}y + A$
Už chybí jen $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.
Uvažme $|f_n(x) - f(x)| \leq |\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(x) - g(x)\ \mathrm{d}y| + |f_n(x_0) - A|$.
Pro $\varepsilon > 0$ najdu $n : |f_n(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Dále $\forall x \in (a,b) : |f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{b-a}$. Využijeme odhad na integrál. Tedy $\int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(x) - g(x)|\ \mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)}$,
tedy $|\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(x) - g(x)\ \mathrm{d}y| + |f_n(x_0) - A| < \varepsilon$. ⊞

Definice 11 (Mocninná řada)**.** Nechť $c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$. Pak Mocninná řada v základním tvaru je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Tuto řadu budeme dále značit jako $(*)$.

Definice 12 (Poloměr konvergence)**.** Poloměr konvergence řady $(*)$ definujeme jako $R = \sup\{r \in [0, \infty) : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \text{ konverguje}\}$

Věta 9 (Lokální stejnoměrná konvergence mocninné řady)**.** Řada $(*)$ konverguje lokálně stejnoměrně na $B(a,R)$ a zároveň diverguje na $C \setminus \overline{B(a,R)}$, kde R je poloměr konvergence řady.
Pokud $R = \infty$, pak $(*)$ konverguje na $\mathbb{C}$.

Důkaz. Vezmeme $r < r_1 < R$, r libovolně blízko R.
Ukážeme, že $(*)$ konverguje stejnoměrně na $B(a,R)$.
Bodová konvergence: $|z-a| < r$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je Cauchyovská.
Tedy pokud máme ε, najdu $n_0 : \forall n \geq m > n_0 : \sum\limits_{k=m}^{n} |c_n| r^n < \varepsilon$.
A na $B(a,r)$: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.
$\forall z \in B(a,r) : |f(z) - \sum\limits_{n=0}^{N} c_n(z-a)^n| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(z-a)^n| < \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |c_n| r^n$
Mám $\varepsilon > 0$: najdu $r_0 : \forall n > n_0 : \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k r^k < \varepsilon$. ⊞

Věta 10 (O inverzu poloměru konvergence)**.** Položme $L = \lim\limits_{n\to\infty} = \limsup\limits_{n\to\infty}\{\sqrt[k]{|c_k|} : k > n\} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
Pokud $L = 0$, položme $R = \infty$, pokud $L = \infty$, položme $R = 0$, jinak $L \in (0, \infty)$ a položíme $R = \frac{1}{L}$.
Potom řada $(*)$ konverguje stejnoměrně lokálně na $B(a,R)$ a diverguje na $C \setminus \overline{B(a,r)}$.

Důkaz. Ukážeme, že L je vždy definováno: $A_n = \{\sqrt[k]{|c_k|} : k < n\}$. Pro $m > n : \sup A_m \leq \sup A_n$
Pak buď $\sup A_n \in [0, \infty)$ a posloupnost má limitu, nebo $\sup A_n = \infty \forall n \in \mathbb{N}$.
Pokud $0 \leq r < R$, pak řada konverguje.
$R = 0 \Rightarrow r = 0$ konverguje.
Pokud $R \in (0, \infty), L = \frac{1}{R}, L = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$.
Pak $\forall \varepsilon > 0 \exists$ nekonečně mnoho $c_n : \sqrt[n]{|c_n|} > L - \varepsilon$ a také $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > N_0\ \sqrt[n]{|c_n|} < L + \varepsilon$.
Vezmu si $r : 0 \leq r < R : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ - po použití Cauchyova odmocninového kritéria: $\sqrt[n]{|c_n| \cdot r^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot r \leq (L + \varepsilon) \cdot r < (L+\varepsilon)(\frac{1}{L} - \varepsilon') < 1$, kde z $R = \frac{1}{L}$ mám $r < \frac{1}{L}$, tedy můžu vzít $r < \frac{1}{L} - \varepsilon'$ - volím nejdříve ε' a poté ε.
Dále ukážeme, že vně kruhu diverguje: Vezmu $r > R, z : |z-a| = r$. Volím ε tak malé, aby $r > \frac{1}{L-\varepsilon} > R$ a mám nekonečně mnoho $c_n : \sqrt[n]{|c_n|} > L - \varepsilon$, tedy $|c_n| \cdot r^n > (L-\varepsilon)^n \cdot \frac{1}{(L-\varepsilon)^n} = 1$. Protože $|c_n(z-a)^n| > 1$, řada nutně diverguje z nesplnění nutné podmínky konvergence. ⊞

Věta 11 (Mocninná řada a její derivace a primitivní funkce)**.** Nechť $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Potom na $B(a, R)$ $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ a pro $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ platí $F'(z) = f(z)$ na $B(a, R)$.

Důkaz. Označíme $\widehat{f} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ - tato řada konverguje stejnoměrně a je spojitá. Zvlášť vyšetříme reálnou a imaginární složku f. Derivace: $\Re(\sum\limits_{n=1}^{N} nc_n(z-a)^{n-1}), \Im(\sum\limits_{n=1}^{N} nc_n(z-a)^{n-1})$ - konvergují stejnoměrně. Tedy $\Re(f)$ a $\Im(f)$ má parciální derivace určeny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ dle Cauchy-Riemannových podmínek. Dále jsou spojité, tedy f má i totální diferenciál. ⊞

Definice 13 (Křivka)**.** Křivka je spojité zobrazení $[a, b] \to \mathbb{C}$.

Definice 14 (Cesta)**.** Cesta je po částech hladká křivka. Tedy $\exists(x_1, \dots, x_n) : \varphi : [a, b] \to \mathbb{C} : \varphi \in C^1[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$.

Definice 15 (Délka cesty)**.** Délka cesty φ je $L(\varphi) := \int\limits_a^b |\varphi'|(t)\ \mathrm{d}t$.

Definice 16 (Integrál podle cesty)**.** Pokud φ je cesta, f je spojitá funkce v $\mathbb{C}$, pak $\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$

Definice 17 (Obraz křivky, její počáteční a koncový bod, součet křivek)**.** Obraz křivky φ značíme $< \varphi >$. Počáteční bod je $\varphi(a)$, koncový bod je $\varphi(b)$. Operátor $\dot{+}$: Buď φ, ψ křivky a počáteční bod φ je koncový bod ψ. Pak $\varphi : [b, c] \to \mathbb{C}, \psi : [b, c] \to \mathbb{C}, \psi \dot{+} \varphi : [a, c] \to \mathbb{C} : x \in [a, b] : (\psi \dot{+} \varphi(x) = \psi(x), x \in [b, c] : (\psi \dot{+} \varphi)(x) = \varphi(x)$.

Věta 12 (Vlastnosti integrálu podle cesty)**.** Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta, f je spojitá na $< \varphi >$.

1. Nechť h je rostoucí C^1 zobrazení $[c, d] \to [a, b]$. Pak $\int_{\varphi \circ h} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z$. (Nezávislost na parametrizaci)
2. Buď $\psi : [c, d] \to \mathbb{C} : \varphi(b) = \psi(c) \wedge b = c$. Potom $\int_{\varphi \dot{+} \psi} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z + \int_\psi f(z)\ \mathrm{d}z$
3. $|\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z| \leq L(\varphi) \cdot \max_{z \in \langle\varphi\rangle} |f(z)|$

Důkaz. 1. Rozepsat.
2. Z definice.
3. $|\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t| \leq \int\limits_a^b |f(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t \leq \max\limits_{z \in \langle\varphi\rangle} |f(t)| \cdot \int\limits_a^b |\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t = \max\limits_{z \in \langle\varphi\rangle} \cdot L(\varphi)$. ⊞

Definice 18 (Primitivní funkce)**.** Nechť f je definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že F je primitivní k f na Ω, pokud $\forall z \in \Omega : F'(z) = f(z)$.

Věta 13 (O integrálu)**.** Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $\langle\varphi\rangle \subset \Omega, F$ je primitivní k f na Ω, f je spojitá na Ω.
Potom $\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Důkaz. $\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ ⊞

Definice 19 (Uzavřená křivka)**.** Křivku φ nazveme uzavřenou, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Pozorování (Integrál po uzavřené křivce)**.** Pokud f má primitivní funkci a φ je uzavřená cesta, pak $\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z = 0$

Definice 20 (Souvislá množina, křivkově souvislá množina)**.** Nechť (T, σ) je metrický prostor a $G \subset T$ je omezená. Řekneme, že G je souvislá, pokud neexistují G_1, G_2 otevřené tak, že $G_1 \neq \emptyset \neq G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset, C_1 \cup G_2 = G$.
Nechť $H \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že H je křivkově souvislá, pokud $\forall x, y \in H \exists$ křivka $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C} : \langle\varphi\rangle \subset H, \varphi(a) = x, \varphi(b) = y$.

Věta 14 (Ekvivalence souvislost a křivkové souvislosti na komplexních číslech)**.** Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak G je souvislá $\Leftrightarrow$ je křivkově souvislá. Navíc, $\forall x, y \in G$ lze x a y spojit lomenou čarou.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: G je souvislá, mějme $x, y \in G$. Označme G_1, které lze propojit křivkou s x a G_2 body, které nelze propojit křivkou s x.
Pak $G_1 \cap G_2 = \emptyset, G_1 \cup G_2 = G, G_1$ je otevřená. Buď $z \in G_1 \Rightarrow z \in G \to \exists \varepsilon > 0 : B(z, \varepsilon) \subset G$. Pokud $z' \in B(z, \varepsilon)$, existuje úsečka $[z, z'] \subset B(z, \varepsilon) \subset G$.
Tedy $\exists$ křivka $\varphi : \langle\varphi\rangle \subset G, \varphi(a) = x, \varphi(b) = z$, tedy $\varphi + [z, z']$ spojije x a z, tedy $B(z, \varepsilon) \subset G_1$l.
Analogicky pro $G_2 : z \in G_2$, má $B(z, \varepsilon) \subset G$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Tedy analogicky G_2 je otevřená.
G_1 je neprázdná, tedy G_2 musí být prázdná, a tedy G je křivkově souvislá.
„$\Leftarrow$“: Nechť $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \cup G_2 = G$, G_1, G_2 jsou otevřené podmnožiny G. Mějme $x \in G_1, y \in G_2$.
Buď $\varphi : [a, b] \to G$ spojující $x, y : \varphi(a) = x, \varphi(b) = y, \varphi(a) \in G_1, \varphi(b) \in G_2$.
Zvolme $s = \sup\{t : \varphi(t) \in G_1\}$.
Víme, že $\exists t_n : \varphi(t_n) \in G_1, t_n \to s, \exists r_n : \varphi(r_n) \to s$. Uvažme $\varphi(s)$ - pro $\varepsilon > 0 : B(\varphi(a), \varepsilon) : \exists n : \varphi(t_n) \in B(\varphi(s), \varepsilon), \varphi(r_n) \in B(\varphi(s), \varepsilon) \Rightarrow \varphi(s) \notin G_1, \varphi(s) \notin G_2$. ⊞

Definice 21 (Oblast, trojúhelník)**.** Souvislá otevřená množina v $\mathbb{C}$ se nazývá oblast.
Trojúhelník je křivka (lomená čára) definovaná třemi body a, b, c. Křivku značíme $\tau_{(a,b,c)}$, vnitřek značíme $T_{(a,b,c)}$.

Věta 15 (Cauchy-Goursatova)**.** Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $T \subset G$ je trojúhelník, f je spojitá na G a holomorfní na G vyjma nejvýše jednoho bodu.
Pak $\int_{\tau_{(a,b,c)}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Důkaz. Nechť f je holomorfní na T. Rozdělím si trojúhelník na čtyři menší trojúhelníky dle obrázku (TODO) - ty si označím $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$.
Tedy $\int_T f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tau_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tau_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tau_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tau_4} f(z)\,\mathrm{d}z$.
Pak $|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z| \leq \sum_{k=1}^{4} |\int_{\tau_k} f(z)\,\mathrm{d}z|$. Vyberu k takové, že má největší integrál. Pak $|\int_{\tau_k} f(z)\,\mathrm{d}z| \geq \frac{1}{4}|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z|$.
Na τ_k zopakuji stejný postup a získám tím posloupnost trojúhelníků $\tau^{(n)}$: $|\int_{\tau^{(n)} f(z)\,\mathrm{d}z}| \geq \frac{1}{4^n}|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z|$.
Pokud $z_n \in T^{(n)}$, pak z_n konverguje k z.
Vezmu $\varepsilon > 0, z \in G$ - uvažuji $f'(z)$. $\exists h_0 : \forall h < h_0 : w \in B(z, h) : \left|\frac{f(w) - f(z) - f'(z)(w - z)}{|w - z|}\right| < \varepsilon$, tedy $|f(w) - f(z) - f'(z)(w - z)| < \varepsilon h$. Mám $n : T^{(n)}$ je první trojúhelník, který se vejde do $B(z, h)$. Omezíme $\frac{h}{20} \leq L(T^{(n)}) \leq 20h$: $\int_{\tau^{(n)}} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\tau^{(n)}} f(w) - f(z) - f'(z)(w - z)\,\mathrm{d}w - \int_{\tau^{(n)}} -f(z) - f'(z)(w - z)\,\mathrm{d}w$, kde druhý sčítanec je nulový a první má omezen hodnoty funkce (ne integrálu) $< \varepsilon h$.
Pak $L(\tau^{(n)} = 2^{-n}L(\tau)$, $h \leq 20L(\tau^{(n)} \leq 20 \cdot 2^{-n}L(\tau), |\int_{\tau^{(n)}} f(w)\,\mathrm{d}w| \leq L(\tau^{(n)})\varepsilon h \Rightarrow |\int_\tau f(w)\,\mathrm{d}w| \leq 20\varepsilon$.
Nyní nechť P je bod, kde f není holomorfní.
Pokud $P \notin T$, stejně jako předtím.
Pokud P je vrchol T, vezmu $\varepsilon > 0$ a rozdělím dle obrázku (TODO). Pak délka hranice $T_3 \leq \varepsilon : \int_\tau f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tau_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tau_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tau_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tau_3} f(z)\,\mathrm{d}z \leq L(\tau_3) \cdot max_{z \in \langle\tau_3\rangle}|f(z)| = \varepsilon \cdot m$, kde $m < \sup_{z \in T} f(z) \leq k$, tedy m je konečné číslo.
Pokud P je na hraně/straně T: Rozdělíme na dva trojúhelníky se sdílenými vrcholy v P a vrcholu proti straně, na níž je P.
Pokud je P uvnitř, spojím se všemi třemi vrcholy a vhodně zorientuji. ⊞

Věta 16 (Primitivní funkce a křivkový integrál)**.** Nechť Ω je oblast a f je spojitá na Ω. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. f má na Ω primitivní funkce

2. pro každé dvě cesty φ, ψ takové, že $\langle\varphi\rangle \subset \Omega, \langle\psi\rangle \subset \Omega$, které mají shodné počáteční a koncové body platí $\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\psi f(z)\ \mathrm{d}z$

3. pro každou uzavřenou cestu φ platí $\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z$

Důkaz. $3 \Rightarrow 2$: $\varphi - \psi$ je uzavřená cesta, tedy $0 = \int_{\varphi-\psi} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z - \int_\psi f(z)\ \mathrm{d}z$
$2 \Rightarrow 3$: Mám uzavřenou cestu φ. Tak si ji rozdělím v libovolném bodě na φ_1, φ_2. Pak $\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{-\varphi_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f(z)\ \mathrm{d}z - \int_{\varphi_1} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$.
$1 \Rightarrow 2$: minule (TODO: kdy přesně?)
$2 \Rightarrow 1$: fixujeme $z_0 \in \Omega$. Pro $z \in \Omega$ najdeme φ takové, že počáteční bod je z_0, koncový bod je z. Mějme $F(z) = \int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z$. Ze 2: definice F je jednoznačná. Nyní F zderivujeme - parciální derivace: $F = \Re(F) + i \cdot \Im(F)$. Pak $\dfrac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim\limits_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \dfrac{F(z+h) - F(z)}{h}$. Máme φ spojující body z_0, z. Definujeme φ_h jako $\varphi + [z, z+h]$ pro malé h. Pak $F(z+h) - F(z) = \int_{\varphi_h} f(y)\ \mathrm{d}y - \int_\varphi f(w)\ \mathrm{d}w = \int_{[z,z+h]} f(w)\ \mathrm{d}w = \int\limits_0^h f(z+t)\ \mathrm{d}t$.
Tedy $\dfrac{\partial F}{\partial x}(z) = \Re(f(z))$. Analogicky v imaginárním směru. Tedy $F'(z) = f(z)$, což jsme chtěli ukázat. ⊞

Definice 22 (Hvězdovitá množina)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Řekneme, že Ω je hvězdovitá, pokud $\exists P \in \Omega$ takové, že $\forall z \in \Omega$: úsečka $[P, z]$ celá leží v Ω.

Věta 17 (Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu)**.** Nechť Ω je hvězdovitá množina a f je spojitá na Ω a holomorfní na Ω bez nejvýše jednoho bodu. Pak f má na Ω primitivní funkci.

Důkaz. Vezmeme $P \in \Omega$ jako význačný z hvězdovitosti
Definujeme $F(z) = \int\limits_{[P,z]} f(w)\ \mathrm{d}w$.
Ukážeme, že F je primitivní k f.
Opět $\dfrac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(z+h) - F(z)}{h}$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(z, \varepsilon) \subset \Omega$ a h bereme menší než ε. Pak uvážíme trojúhelník daný $P, z, z+h$. Pokud $z \notin [p, z+h]$: $F(z+h) - F(z) = \int\limits_{[P,z+h]} f(w)\ \mathrm{d}w + \int\limits_{[P,z]} f(w)\ \mathrm{d}w \overset{\text{Cauchy-Gorsat}}{=} \int\limits_{[z,z+h]} f(w)\ \mathrm{d}w$. Pokud z leží na úsečce, je to zjevné.
Déle jeden neholomorfní bod vyřešíme podobně jako u Cauchy-Goursata. ⊞

Definice 23 (Index)**.** Nechť φ je uzavřená cesta v $\mathbb{C}$ a $a \notin \langle\varphi\rangle$. Potom definujeme index $\mathrm{Ind}_\varphi a = \left(\int_\varphi \dfrac{\mathrm{d}z}{z-a}\right) \cdot \dfrac{1}{2\pi i}$.

Věta 18 (Jordanova o kružnici (pro křivky))**.** Nechť φ je prostá uzavřená křivka. Pak existují dvě otevřené souvislé disjunktní neprázdné množiny G_1, G_2 takové, že $C \setminus \langle\varphi\rangle = G_1 \cup G_2$.

Věta 19 (Cauchyův vzorec pro kruh)**.** Nechť Ω je otevřená, $a \in \Omega, r \in \mathbb{R}$ tak, že $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$, f je holomorfní na Ω.
Pak pro $w \in B(a,r) : f(w) = \dfrac{1}{2\pi i} \int_\varphi \dfrac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-w}$, kde $\varphi : [0, 2\varphi] \to \mathbb{C} : \varphi(\theta) = r \cdot e^{i\cdot\theta} + a$ je křivka.
Dále f má v $B(a,r)$ derivace vyšších řádů a $f^{(n)}(w) = \dfrac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \dfrac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-w)^{n+1}}$

Důkaz. 1) $\dfrac{f(z) - f(w)}{z-w} \overset{z\neq w}{=:} g_w(z)$, jinak $g_w(w) = f'(w)$. g_w je spojitá na Ω a má derivaci na $\Omega \setminus \{w\}$.
Vezmu $\varepsilon > 0$ malé tak, aby $B(a, r+\varepsilon) \subset \Omega$. $B(a, r+\varepsilon)$ je hvězdovitá. tedy g_w má na $B(a, r+\varepsilon)$ primitivní funkci.
Buď $\langle\varphi\rangle \subset B(a, r+\varepsilon)$. $0 = int_\varphi g_w(z)\ \mathrm{d}z = \int_\varphi \dfrac{f(z) - f(w)}{z-w} = 0$, tedy $\int_\varphi \dfrac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z = \int_\varphi \dfrac{f(w)}{z-w}\ \mathrm{d}z = f(w) \cdot 2\pi i \Rightarrow f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-w}\ \mathrm{d}z$.
Náznak 2: derivace uvnitř integrálu (TODO). ⊞

Pozorování (Vlastnost průměru)**.** $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \dfrac{\xi}{\xi - a}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi i} \dfrac{f(a+re^{it})}{a+re^{it}-a}\cdot ire^{it}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi i} f(a+re^{it})\,\mathrm{d}t$.

Věta 20 (Vyjádření mocninnou řadou)**.** Nechť f je holomorfní na $U(a,r), a \in \mathbb{C}, r > 0$. Pak f je na $U(a,r)$ součtem mocninné řady $\Sigma_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n : c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}, n \geq 0$

Důkaz. Fixujeme $z \in U(a,r)$, vezmeme r_0 takové, že $|z-a| < r_0 < r$.
Vezmeme $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \dfrac{\xi}{\xi - a}\,\mathrm{d}\xi, \varphi(t) = a + r_0 e^{it}, t \in [0, 2\pi]$
Pak $\dfrac{1}{\xi - zu} = \dfrac{1}{\xi - z - a + a} = \dfrac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}}\cdot\dfrac{1}{\xi - a}$. Vidíme, že $|z-a| < |\xi - a| = |r_0|$, tedy $|\frac{z-a}{\xi-a}| < 1, a_0 := \frac{|z-a|}{r_0} < 1$.
Tedy $\dfrac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}\cdot\dfrac{1}{\xi-a} = \dfrac{1}{\xi-a}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-a)^n}{\xi-a)^n}$.
Pak $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi(t))\varphi'(t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-a)^n}{(\varphi(t)-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(\varphi(t))}{(\varphi(t)-a)^{n+1}}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\varphi\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$. ⊞

Důsledek 1. Na $B(a,r) : f$ je holomorfní $\Leftrightarrow f$ je analytická (je vyjádřitelná mocninnou řadou).

Věta 21 (Cauchyův odhad)**.** Nechť f je na $U(a,r)$ součtem řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Pro $\rho \in (0,r)$ označíme $M_\rho := \sup\{|f(z)| : |z-a| = \rho\}$. Pak pro $n \geq 0$ platí $|c_n| \leq \dfrac{M_\rho}{\rho^n}$

Důkaz. f je holomorfní, tedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ má $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho}\dfrac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{f(\varphi(t))\varphi'(t)}{(\varphi(t)-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2pi}\frac{|f(\varphi(t))|}{\rho^n}\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{M_\rho}{\rho^n}$. ⊞

Věta 22 (Liouvilleova)**.** Každá omezená celá funkce je konstantní.

Důkaz. Máme f celou, holomorfní na $\mathbb{C}$, tedy ji mohu vyjádřit jako součet geometrické řady: $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n, z \in \mathbb{C}, a$ zvoleno 0.
f je omezená, tedy $|f(z)| < M, \forall z \in \mathbb{C}$.
Pak $\forall \rho > 0 : |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \Rightarrow (n \geq 1 \Rightarrow c_n = 0)$. ⊞

Věta 23 (Základní věta algebry)**.** Nechť $p(z)$ je polynom stupně $n \geq 1$ na $\mathbb{C}$. Potom p má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť p nemá kořen. Pak $\exists r_0 : \forall z \in \mathbb{C} : |z| > r_0 \Rightarrow |p(z)| > 1$.
Ukážeme, že pro velké z platí $|a_n z^n| \geq |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0| + 1 \geq |a_{n-1}||z^{n-1}| + \ldots + |a_0| + 1$. $|a_n z^n| = |a_n||z^n|$, vezmu $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{|a_{n-1}|t^{n-1} + \ldots + |a_0| + 1}{|a_n|t^n} = 0$, tedy $\exists t_0 : t > t_0 \Rightarrow \dfrac{|a_{n-1}|t^{n-1} + \ldots + |a_0| + 1}{|a_n|t^n} \leq 1$, mám tedy $r_0 = t_0$, pro $|z| > r_0$ platí.
Vidíme, že funkce $|\frac{1}{p}|$ je omezená: vně $\overline{B(0,r_O)}$ máme $|\frac{1}{p}| \leq 1$, uvnitř $\overline{B(0,r_0)}$ je $|\frac{1}{p}|$ spojitá (z neexistence kořene) a $\overline{B(0,r_0)}$ je kompaktní, tedy $\frac{1}{p}$ je celá, tedy je konstantní, a tedy i p je konstantní, což je spor. ⊞

Věta 24 (O kořenech)**.** Nechť f je holomorfní na $U(a,r), a \in \mathbb{C}, r > 0, f(a) = 0$ a f není konstantní. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ a právě jedna funkce g holomorfní na $U(a,r)$ taková, že $f(z) = (z-a)^n g(z)$ na $U(a,r)$.

Důkaz. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$

Pak $c_0 = 0$ a $\exists n \in \mathbb{N} : c_N \neq 0 \wedge \forall m < n : c_m = 0$. Tedy $f(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k(z-a)^k = (z-a)^n \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{k+n}(z-a)^k$.

Tedy $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{k+n}(z-a)^k$, což je naše hledané g. Poloměr konvergence je stejný, $c_n \neq 0 \Rightarrow g(a) \neq 0$. ⊞

Věta 25 (Weierstrassova)**.** Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, f_n jsou holomorfní funkce a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na G.

Pak f je holomorfní na G a $\forall m \geq 0 : f_n^{(m)} \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f^{(n)}$.

Důkaz. Náznak: TODO ⊞

Věta 26 (Klasifikace singularit)**.** Nechť $a \in \mathbb{C}, p > 0, f$ holomorfní na $B(a,r) \setminus \{a\}$. Pak nastává jedna z následujících situací:

1. existuje $\rho \in (0,r)$ takové, že $|f(z)|$ je omezená na $B(a,\rho) \setminus \{a\}$, potom existuje $\lim_{z\to a} f(z) = A$ a pokud dodefinujeme $f(a) = A$, pak f je holomorfní na $B(a,r)$. Říkáme, že f má v a odstranitelnou singularitu.
2. $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$, potom existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$ takové, že pro něj existuje vlastní nenulová limita $\lim_{z\to a}(z-a)^p f(z)$, navíc existují jednoznačně určená čísla $a_{-1}, \ldots, a_{-p}$ taková, že $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} - \ldots \pm \dfrac{a_{-p}}{(z-a)^p}$ má odstranitelnou singularitu v a. Říkáme, že f má v a pól násobnosti p.
3. $\lim_{z\to a} |f(z)|$ neexistuje, pak říkáme, že f má v a podstatnou singularitu.

Důkaz. 1) Vezmeme $g(z) = (z-a)^2 f(z)$ pro $z \neq a$, $g(z) = 0$ pro $z = a$.
Parciální derivace $\Re(g)$ a $\Im(g)$ jsou v a nulové a g má totální diferenciál, tedy g je holomorfní na $B-(a,r)$, a tedy se dá vyjádřit řadou: $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$.

$\frac{g(z)}{(z-a)^2}$ je omezená z předpokladu v okolí a ,tedy $g(z)$ má kořen stupně alespoň 2, tedy $a_0 = a_1 = 0$, tedy $f(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n(z-a)^{n-2}$, tedy f je holomorfní na $B(a,r)$.

2) $\lim_{z\to a} |f(z) = \infty$. Vezmu $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Z limity $f(z)$ v a plyne, že $\exists \rho$ takové že $f(z) \neq 0$ na $B(a,\rho) \setminus \{a\}$.
$g(z)$ je holomorfní na $B(a,\rho) \setminus \{a\}$ a $\lim_{z\to a} g(z) = 0$.
Tedy $\exists \rho_1$ takové, že g je omezená na $G(a,\rho_1) \setminus \{a\}$ a z 1 máme g holomorfně dodefinovatelnou v a a vidíme $g(a) = 0$.
Podle věty o kořenech tedy $\exists p \in \mathbb{N} : g(z) = (z-a)^p h(z)$ s h holomorfní na $B(a,\rho_1)$ a $h(a) \neq 0$.
Tedy $\dfrac{1}{f(z)} = (z-a)^p h(z) \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^p} \cdot \dfrac{1}{h(z)}$ na nějakém prstencovém okolí a.

Pak $z(a)^p f(z) = \dfrac{1}{h(z)}$, tedy $\lim_{z\to a}(z-a)^p f(z) = \frac{1}{h(a)}$. Jelikož $\frac{1}{h(z)}$ je holomorfní na okolí a, je $\frac{1}{h(z)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$.

$f(z) = \frac{1}{(z-a)^p} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n = \sum\limits_{n=p}^{\infty} b_{n+p}(z-a)^n = \sum\limits_{n=p}^{-1} b_{n+p}(z-a)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{n+p}(z-a)^n$, což je náš hledaný tvar.
3) Může nastat. ⊞

Definice 24 (Lorentova řada, její regulární a hlavní část)**.** Nechť $a \in \mathbb{C}$, $(c_n) \subset \mathbb{C}$ je posloupnost (pro $n \in \mathbb{Z}$).

Řadu $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ nazveme Laurentovou řadou o středu a.

Mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ nazveme regulární částí Laurentovy řady a řadu $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ nazveme hlavní částí Laurentovy řady.

Definice 25 (Reziduum)**.** Koeficient c_{-1} v Laurentově řadě nazveme reziduum f v bodě a. Značíme jej $\text{res}_a f$.

Věta 27 (Reziduová)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, pro kterou platí Cauchyova věta (např. hvězdovitá, ale může být i jiná).
Dále nechť $M \subset \Omega$ je konečná množina, f je funkce holomorfní na $\Omega \setminus M$ a f má póly v bodech M.
Nechť φ je uzavřená křivka, $\langle\varphi\rangle \subset \Omega \setminus M$. Pak $\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum\limits_{a\in M} \text{Ind}_a(\varphi) \cdot \text{res}_a f$

Důkaz. Mějme $a_1, \dots, a_m \in M$.
Pro a_k máme p_k tak, že $f - \sum\limits_{n=-p_k}^{-1} c_{k,n}(z-a_k)^n$ holomorfní na okolí a_k.

Vidíme, že $\sum\limits_{a=p_k}^{-1} c_{k,n}(z-a_k)^n$ je holomorfní na $\mathbb{Z} \setminus \{a_k\}$.

Definujeme $g(z) = f(z) - \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{n=-p_k}^{-1} c_{k,n}(z-a_k)^n$.

g má odstranitelné singularity v bodech a_k, a tedy ji dodefinujeme jako holomorfní na Ω: v $a_k : g(z) = f(z) - \sum_{n=-pk}^{-1} c_{k,n}(z-a_k)^n - \sum\limits_{l=1, l\neq k}^{m} \sum\limits_{n=p_l}^{-1} c_{l,n}(z-a_l)^n$

Pak $\int_\varphi f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\varphi g(z)\ \mathrm{d}z + \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{n=-p_k}^{-1} \int_\varphi c_{k,n}(z-a_k)^n\ \mathrm{d}z$. ⊞

Důsledek 2 (Pravidla pro výpočet rezidua)**.** Nechť f, g jsou holomorfní na $B(a, r)$ a mají póly v a. Pak

1. Má-li f pól násobnosti p v a, pak $\text{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \lim\limits_{z\to a} (f(z) \cdot (z-a)^p)^{(p-1)}$
2. Jsou-li f, g holomorfní v a a g má kořen násobnosti 1, pak $\text{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$
3. Je-li f holomorfní v a a g má pól násobnosti 1, pak $\text{res}_a(fg) = f(a) \cdot \text{res}_a g$

Definice 26 (Fourierova řada)**.** Nechť f je 2π-periodická funkce, která je Riemannovsky integrovatelná na $[0, 2\pi]$. Potom definujeme pro $n \in \mathbb{N} : a_n = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\cos nx) f(x)\ \mathrm{d}x, b_n = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\sin nx) f(x)\ \mathrm{d}x$. $(b_0 = 0)$

Potom řadu $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ nazveme Fourierovou řadou funkce f v reálném tvaru.

Dále položíme pro $n \in \mathbb{Z} : c_n = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\ \mathrm{d}x$ a řadu $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ nazveme Fourierovou řadou f v komplexním tvaru.

Definice 27 (N-tý součet Fourierovy řady)**.** N-tý součet Fourierovy řady definujeme jako $S_n = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$.

Definice 28 (Konvoluce)**.** Nechť f, g jsou 2π-periodické a Riemannovsky integrovatelné na $[-\pi, \pi]$. Definujeme operátor konvoluce $*$ jako $f * g(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x-t) f(t)\ \mathrm{d}t$.

Definice 29 (Dirichletovo jádro)**.** Dirichletovo jádro definujeme jako $D_N(x) = \sum\limits_{n=-N}^{N} e^{inx}$.

Lemma 1 (O Dirichletově jádru)**.** $D_N(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Důkaz. $D_N(x) = e^{-iNx} \cdot \sum\limits_{n=0}^{2N} e^{inx} = e^{-iNx} \cdot \dfrac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \dfrac{e^{i(-N)x} - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} \cdot \dfrac{-e^{i\frac{x}{2}}}{-e^{i\frac{x}{2}}} = \dfrac{e^{i(N+\frac{1}{2}x)} - e^{-i(N+\frac{1}{2}x)}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \cdot$
$\dfrac{2i}{2i} = \dfrac{\sin(\frac{2x+1}{2} x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ pro $x \neq 2k\pi$, ale umíme spojitě rozšířit. ⊞

Definice 30 (Stejnoměrná spojitost)**.** Funkce f je na intervalu I stejnoměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta : \forall x, y \in I : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Věta 28 (Spojitost a stejnoměrná spojitost na uzavřeném intervalu)**.** Nechť I je uzavřený interval a f je spojitá na I. Pak f je stejnoměrně spojitá na I.

Důkaz. Dokážeme sporem - Nechť $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta \exists x, y \in I : |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$.
Volím $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, vezmeme x_n, y_n s pro spor předpokládanou vlastností.
Vezmeme x_{n_k} konvergentní podposloupnost k x. Pozorujeme $y_{n_k} \to x$. Ovšem $\lim f(x_{n_k}) = f(x), \lim f(y_{n_k}) = f(x)$, což je spor. ⊞

Věta 29 (Aproximativní jednotka)**.** Nechť K_n jsou spojité, 2π-periodické funkce takové, že pro $n \geq 1$:

- $\dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x) \, \mathrm{d}x$
- $\forall x \in \mathbb{R} : K_n(x) \geq 0$
- $\forall \delta > 0$ platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} K_n(x) \, \mathrm{d}x = 0$

Pak (K_n) nazveme aproximativní jednotkou a pro spojitou, 2π-periodickou funkci f platí $f * K_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Zpozorujeme, že f je stejnoměrně spojitá.
Vezmu $\varepsilon > 0$. Zpozoruji, že pro $\delta > 0$ se „většina masy“ integrálu pohybuje na $(-\delta, \delta)$. Najdu δ tak, aby $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Vezmu n_0 tak, aby pro $n \geq n_0 : |\dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} K_n(x) \, \mathrm{d}x| < \frac{\varepsilon}{4c}$, kde $c = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.
Vezmu $x \in \mathbb{R}$, pro $n \geq n_0$: $|f(x) - f * K_n(x)| \leq |f(x) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(y) \cdot f(x-y) \, \mathrm{d}y| \leq |\frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-pi,pi]\setminus(-\delta,\delta)} K_n(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y| + |f(x) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y| \leq c \cdot \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} K_n(x) \, \mathrm{d}x + |f(x) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(y) f(x) \, \mathrm{d}y| + |\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(y)(f(x) - f(x-y)) \, \mathrm{d}y| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ⊞

Definice 31 (Fejérovo jádro)**.** Pro $N \in \mathbb{N}$ definujeme Fejérovo jádro jako $F_N(x) = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n=0}^{N-1} D_n(x)$.

Věta 30 (Fejérovo jádro je aproximativní jednotka)**.** Nechť f je spojitá, 2π-periodická funkce na $\mathbb{R}$. Pak $F_N * f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. F_N je aproximativní jednotka: 1,2 ✓. 3: $F_n = \dfrac{(\sin(\dfrac{nx}{2}))^2}{(\sin(\dfrac{x}{2}))^2} \cdot \frac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n \cdot (\sin(\dfrac{x}{2}))^2}$.
Vezmeme $\delta > 0$: na intervalech $[-\pi, -\delta], [\delta, \pi]$ je $\dfrac{1}{(\sin \dfrac{x}{2})^2}$ spojitá funkce, tedy je omezená, z věty o omezené a mizející posloupnosti jde navíc stejnoměrně k nule a z prohození integrálu a limity jde i integrál k nule. ⊞

Věta 31 (O jednoznačnosti Fourierových koeficientů)**.** Nechť 2π-periodická spojitá funkce f má všechny koeficienty Fourierovy řady nulové. Pak f je nulová funkce.

Důkaz. $0 = f * F_n(x) \rightrightarrows f \Rightarrow f$ je nulová funkce. ⊞

Věta 32 (O konvergenci Fourierovy řady)**.** Nechť f je spojitá, 2π-periodická funkce, a má Fourierovy koeficienty c_n. Nechť je řada $\sum\limits_{n=-\infty,}^{\infty} |c_n|$ absolutně konvergentní. Pak $\sum_{n=-N}^{N} c_e^{inx} \rightrightarrows f(x)$.

Důkaz. $\sum |c_n|$AK$\Rightarrow \sum c_n e^{ix}$ AK ($|e^{ix}| \leq 1$).
Stejnoměrně: $|\sum c_n e^{inx}| \leq \sum\limits_{|n|>N} |c_n| \to 0$.

Označím $g(x) := \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, $d_n = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} g(x)\ \mathrm{d}x \overset{\text{stejnom. konv.}}{=} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-inx} e^{ikx} c_k\ \mathrm{d}x = c_n$.
$g(x)$ má stejné Fourierovy koeficienty jako $f(x)$, a podle věty o jednoznačnosti Fourierových koeficientů $f(x) = g(x)$. ⊞

Věta 33 (Fourierova řada hladké funkce)**.** Nechť f je 2π-periodická na $\mathbb{R}$ a f'' je spojitá na $\mathbb{R}$. Potom Fourierova řada f konverguje stejnoměrně k f na $\mathbb{R}$.

Důkaz. $c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{-inx}}{-in} f(x) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{-in} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f'(x)\ \mathrm{d}x \right) = \left[\frac{1}{2\pi} \frac{1}{-n^2} e^{-inx} f'(x) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f''(x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{n^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f''(x)\ \mathrm{d}x$.
Pak $|c_n| = |\frac{1}{2\pi} \frac{1}{n^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f''(x)\ \mathrm{d}x| \leq \frac{1}{n^2} \cdot \max\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)|$, tedy $\sum c_n$ konverguje z porovnávacího kritéria.
Tedy z věty o konvergenci Fourierovy řady konverguje stejnoměrně. ⊞

Věta 34 (Aproximace trigonometrickým polynomem)**.** Nechť f je 2π-periodická spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\forall \delta > 0\ \exists$ konečná posloupnost $(d_n)_{n=-N}^{N}$ pro $N \in \mathbb{N}$ taková, že $\forall x \in \mathbb{R} : \left| \left(\sum\limits_{n=-N}^{N} d_n e^{inx} \right) - f(x) \right| < \delta$

Důkaz. $f * F_n$ je trigonometrický polynom - najdu n tak, aby $|f * F_n - f| < \delta$. ⊞

Věta 35 (Weierstrassova)**.** Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu. Pak pro $\delta > 0$ existuje polynom $p(x)$ tak, že $|f(x) - p(x)| < \delta$.

Důkaz. 1) Nechť f je spojitá na $[0, \pi]$ (přeškálujeme a posuneme).
2) Rozšíříme na $\hat{f}$: $\hat{f}(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$, $\hat{f}(x) = f(-x) \Leftrightarrow x \in [-\pi, 0]$ a periodizujeme.
3) $\hat{f}$ je 2π-periodická a spojitá, tedy existuje trigonometrický polynom $\sum\limits_{n=-N}^{N} d_n e^{inx}$, který aproximuje $\hat{f}$ s přesností $\frac{\delta}{2}$.
Pro každé $n \in [-N, N] \cap \mathbb{Z}$ řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(inx)^k}{k!}$ konverguje stejnoměrně na $[0, \pi]$ k e^{inx}. Najdu K_n tak, aby $\left| e^{inx} - \sum\limits_{k=0}^{K_n} \dfrac{(in)^k}{k!} x^k \right| \leq \dfrac{\delta}{2} \cdot \dfrac{1}{|d_n| \cdot |2N+1|}$.
Sečtu všechny polynomy vynásobené d_n a čímž získám opět polynom, který je aproximující s přesností $\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$.- ⊞

Definice 32 (Skalární součin)**.** Nechť f, g jsou spojité, 2π-periodické funkce na $\mathbb{R}$. Potom skalární součin $\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\ \mathrm{d}x$.

Definice 33 (L^2-norma)**.** Nechť f je spojitá, 2π-periodická funkce na $\mathbb{R}$. Potom definujeme L^2-normu jako $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Věta 36 (Pythagorova)**.** Nechť f, g jsou spojité, 2π-periodické funkce na $\mathbb{R}$ a $\langle f, g \rangle = 0$. Pak $\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 = \|f + g\|_2^2$

Důkaz. $\langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle g, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle$ ⊞

Věta 37 (L^2-konvergence)**.** Nechť f je spojitá, 2π-periodická funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\|f * D_N - f\|_2 \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Důkaz. Nechť $N \in \mathbb{N}$. Definujeme podprostor $P_N = \operatorname{span}(\{e^{inx} : n \in \{-N, \dots, N\}\})$.
Ukážeme, že nejbližší bod k f v P_N je $f * D_N$.
Vezmeme $g \in P_N : g \neq f * D_N : g = \sum\limits_{n=-N}^{N} b_n e^{inx}$, f má tyto koeficienty: $\sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$

$\langle f - f * D_N, g\rangle \overset{\text{linearita}}{\underset{\text{sk. souč.}}{=}} \sum\limits_{n=-N}^{N} \overline{b_n} \langle f - \sum\limits_{k=-N}^{N} c_n e^{ikx}, e^{inx}\rangle = \sum\limits_{n=-N}^{N} \left(\overline{b_n} \cdot \left(\langle f, e^{inx}\rangle - \sum\limits_{k=-N}^{N} \langle c_n e^{ikx}, e^{inx}\rangle\right)\right) =$

$\sum\limits_{n=-N}^{N} (c_n - c_n) = 0$
Tedy $f - f * D_n \perp g$, a jelikož $g, f * D_N \in P_N$, vidíme $f - f * D_N \perp g - f * D_N$
Máme kolmost, tedy z Pythagorovy věty: $\|f - g\|_2^2 = \|f - f * D_N\|_2^2 + \|f * D_N - g\|_2^2$, tedy $\|f - g\|_2 \geq \|f - f * D_n\|_2$.
Vezmu $\delta > 0 : F_N * f \rightrightarrows f$, najdu $N_0 : \forall n \geq n_0 : |F_n * f - f| < \delta$.
Pak $\|F_n * f - f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |F_n * f - f|^2(x) \,\mathrm{d}x \leq \delta^2$
Tedy $\|D_B * f - f\|_2 < \|F_N * f - f\|_2 \leq \delta$. ⊞

Věta 38 (Parsevalova rovnost)**.** Nechť f je 2π-periodická funkce. Potom $\|f\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2}$

Důkaz. $\|f\|_2 = \langle f, f\rangle \overset{n\in\mathbb{N}}{=} \langle f - S_n f + S_n f, f - S_n f + S_n f\rangle = \langle f - S_n f, f - S_n f\rangle + \langle S_n f, S_n f\rangle + \langle f - S_n f, S_n f\rangle + \langle S_n f, f - S_n f\rangle$
Z L^2-konvergence máme $\langle f - S_n f, f - S_n f\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, dále $\langle S_n f, S_n f\rangle = \sum\limits_{N=-n}^{n} |c_N|^2$. Dále $S_n f$ je ortogonální projekce f, tedy $\langle f - S_n f, f\rangle = \langle f, f - S_n f\rangle = 0$.
Tedy $\langle f - S_n f, f - S_n f\rangle + \langle S_n f, S_n f\rangle + \langle f - S_n f, S_n f\rangle + \langle S_n f, f - S_n f\rangle = \sum\limits_{N=-n}^{n} |c_N|^2 + \|f - S_n f\|_2^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$

$\sum\limits_{N=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \Rightarrow \|f\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{N=-\infty}^{\infty} |c_n|^2}$. ⊞

Věta 39 (Riemann-Lebesgueovo lemma)**.** Nechť f je spojitá, 2π-periodická funkce. Pak $\lim\limits_{n\to-\infty} c_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}$.

Důkaz. Plyne z konvergence řady $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ a nutné podmínky konvergence. ⊞

Seznam témat