Poznámky - nekonečné množiny

Petr Chmel, ZS 2020/21

Definice 1 (Ordinál)**.** Množina α je ordinál, je-li tranzitivní ($x \in \alpha \to x \subseteq \alpha$) a zároveň $\in$ je dobré ostré uspořádání na α.

Ordinál je izolovaný, pokud je tvaru $\beta \cup \{\beta\}$. Jinak je limitní.

Cvičení 1 (Dolní množina třídy ordinálů je ordinál)**.** Libovolná dolní množina $(On, \in)$ je ordinál.

Důkaz. Označme $\alpha = (\leftarrow, \beta)$. Evidentně $\in$ je dobré uspořádání na α, stačí jen ověřit tranzitivitu. ⊞

Věta 1 (O porovnávání dobrých uspořádání)**.** Buďte $(a, r), (b, s)$ dobře uspořádané množiny. Pak existuje právě jedno počátkové vnoření a do b nebo b do a.

Lemma 1 (Pomocné lemma k větě o typu dobrého uspořádání)**.** Buď a množina dobře uspořádaná relací r, X dolní množina z (a, r), $X \neq a$. Pak existuje právě jedno $x \in a$ takové, že $X = \{y \in a : y \leq_r x\} = (\leftarrow, x)$.

Důkaz. Nechť x je nejmenší prvek $a - X$. Tedy $\forall y <_r x$ patří do X, tedy $(\leftarrow, x) \subseteq X$.

Obrácená inkluze sporem: kdyby $y \in X, y \geq_r x$, pak, jelikož x je dolní množina, pak $x \in X$, a tedy $x \notin a - X$, což je spor. ⊞

Věta 2 (O typu dobrého uspořádání)**.** Je-li a množina dobře uspořádaná relací r, pak existuje právě jedno ordinální číslo α a právě jeden izomorfismus (a, r) a $(\alpha, \in)$. Pak α definujeme jako ordinální typ r (uspořádané množiny (a, r)).

Důkaz. Máme (a, r) a definujeme $X = \{x \in a : (\exists \alpha \in On)((\leftarrow, x), r)$ je izomorfní $(\alpha, <)\}$ a takové α označíme α_x. Pak X je dolní množina, neboť pro $x \in X, y \in a, y <_r x$ - pak $(\leftarrow, y)$ je dolní v $(\leftarrow, x)$, a tedy $(\leftarrow, x) \overset{i_x}{\to} (\alpha, <)$ z věty o porovnávání dobrých uspořádání. Zúžení i_x na $(\leftarrow, y)$ bude izomorfní s dolní množinou v α, což je nějaký ordinál β.

Dle předchozího lemmatu: $X = a$ nebo $X = (\leftarrow, x)$ pro nějaké $x \in a$.

V obou případech definujeme $f : X \to On : f(y) = \alpha_y$. Toto zobrazení je prostě a izomorfismus X s $\mathrm{Rng}(f)$. $\mathrm{Rng}(f)$ je dolní v On: když $\beta < \alpha_y \in \mathrm{Rng}(f)$, pak vzor $i_y^{-1}[\beta]$ je dolní množina v a a je rovná nějaké $(\leftarrow, b)$ pro $b \in X, \beta = \alpha_b$.

Dále $\mathrm{Rng}(f)$ je ordinál α: pro $x \in X$: pokud $x \in X$, pak $x \in (\leftarrow, x)$ je spor s definicí. Tedy $x = a$, a f je hledaný izomorfismus. ⊞

Cvičení 2 (Dobře uspořádaná vlastní třída neizomorfní $(On, <)$)**.** Existuje dobře uspořádaná vlastní třída neizomorfní $(On, <)$?

Důkaz. TODO ⊞

Věta 3 (Princip transfinitní indukce)**.** Je-li $A \subseteq On$ třída splňující $(\forall \alpha \in On)(\alpha \subseteq A \to \alpha \in A)$, pak $A = On$.

Věta 4 (Princip transfinitní indukce, verze 2)**.** Je-li $A \subseteq On$ třída splňující

1. $0 \in A$,
2. $(\forall \alpha \in On)(\alpha \in A \to \alpha \cup \{\alpha\} \in A)$,
3. $(\forall \alpha \in On)(\alpha$ limitní $\to (\alpha \subseteq A \to \alpha \in A))$,

pak $A = On$.

Věta 5 (O transfinitní rekurzi)**.** Je-li $G : V \to V$ třídové zobrazení, pak existuje právě jedno třídové zobrazení $F : On \to V$ splňující: $(\forall \alpha \in On) F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$.

Důkaz. Definujeme třídu „aproximací“ $F : A = \{f : f \text{ zobrazení}, \exists\beta \in On : \mathrm{Dom}(f) = \beta \wedge (\forall\alpha \leq \beta)(f(\alpha) = G(F \restriction \alpha))\}$. Pak $F = \bigcup A$. Ověříme požadavky: $F \subseteq On \times V : f \subseteq On \times V$ F je zobrazení: jsou-li $f, f' \in A$, $\alpha \in Dom(f) \cap Dom(f')$, pak $f(\alpha) = f'(\alpha)$, což dokážeme v následujícím:

$\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(f')$ je ordinál δ. Sporem nechť $\alpha \in \delta$ je nejmenší, kde se rovnost poruší, tedy $f(\alpha) \neq f'(\alpha) \wedge f \restriction \alpha = f' \restriction \alpha$. Pak $f(\alpha) = G(f \restriction \alpha) = G(f' \restriction \alpha) = f'(\alpha)$.

Zbývá jen ukázat, že $\mathrm{Dom}(F) = On$. Určitě $\mathrm{Dom}(F)$ je dolní části On - libovolné sjednocení dolních částí je dolní část. Tedy buď $\mathrm{Dom}(F) = Om$, nebo $\mathrm{Dom}(F) = \kappa \in On$, tedy z axiomu nahrazení je F množina, a tedy $F \in A$ (pro κ izolované, pokud je κ limitní, pak $\forall\alpha < \kappa : \exists f \in A : \alpha \in Dom(f)$.

Zadefinujeme $F_1 = F \cup \{(\kappa, G(F) = G(F_1 \restriction \kappa))\}$, pak $\mathrm{Dom}(F_1) = \kappa \cup \{\kappa\}$. Jistě $F_1 \in A$, tedy $\kappa \in \mathrm{Dom}(F_1)$, a jelikož $F_1 \subseteq F$ (z definice), pak $\kappa \in \mathrm{Dom}(F) = \kappa$, což je spor s axiomem fundovanosti.

Tedy $\mathrm{Dom}(F) = On$.

Víme, že je zobrazení, a tedy ještě dokončíme: F splňuje $(\forall\alpha \in On)(F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)) : \alpha \in On \exists f \in A : \alpha \in \mathrm{Dom}(f) \wedge f(\alpha) = G(f \restriction \alpha)$. Tedy $F = \bigcup A$, a tedy $F \supseteq f$, načež $F(\alpha) = f(\alpha), F \restriction \alpha = f \restriction \alpha$. Tedy $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$.

Jednoznačnost ukážeme sporem: nechť F, F' splňují podmínky věty a $F \neq F'$. Nechť α je nejmenší ordinál, pro který platí $F(\alpha) \neq F'(\alpha)$. Tedy $F \restriction \alpha = F' \restriction \alpha$, a tedy $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha) = G(F' \restriction \alpha) = F'(\alpha)$. ⊞

Cvičení 3 (Podmnožina roviny, který každou přímku protíná právě ve dvou bodech)**.** Ukažte, že existuje podmnožina roviny, který každou přímku protíná právě ve dvou bodech.

Věta 6 (AC je ekvivalentní WO)**.** Axiom výběru je ekvivalentní principu dobrého uspořádání.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Transfinitní rekurzí: mějme množinu x a selektor $f : \mathcal{P}(x) \to x$, sestrojíme $g : On \to x$, které nám pak bude indukovat dobré uspořádání skrze izomorfismus, a to následovně: $g(0) = f(x)$, $g(\alpha) = f(x \setminus g[\alpha])$.

„$\Leftarrow$“: Máme-li dobré uspořádání, pak selektor $f : \mathcal{P}(x) \to x$ může být třeba $f(Y) = \min Y$, který je definovaný z existence dobrého uspořádání. ⊞

Cvičení 4. Dokažte transfinitní rekurzí, že dobře uspořádaná vlastní třída taková, že každá její dolní část je množina, je izomorfní $(On, <)$.

Axiom 1 (Princip maximality (Zornovo lemma))**.** Je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina taková, že každý řetězec má nějakou horní mez, pak nad každým prvkem a existuje maximální prvek b takový, že $a \leq b$.

Věta 7 (AC implikuje PM)**.** $AC \Rightarrow PM$ v ZF.

Důkaz. Sporem: nechť takový maximální prvek nad a neexistuje, tedy má ostrou horní závoru. Uvažme f selektor na $\mathcal{P}(A)$. Definujeme funkci g z množiny všech řetězců (dobře uspořádaných podmnožin) pro které je a dolní mez: $g(C) = f(\{x \in A : x \text{ je horní mez } C \wedge x \notin C\})$. Jinak $g(X) := a$. Definujeme $H : On \to A$ rekurzivně: $H(0) = a, H(\alpha \cup \{\alpha\}) = g(\{H(\alpha)\})$, pro β limitní $H(\beta) = g(H[\beta])$. Pak H je ostře rostoucí zobrazení $(\alpha > \beta \to H(\alpha) < H(\beta))$ a $H[\beta]$ je dobře uspořádaná množina. Jelikož je rostoucí, pak je i prosté zobrazení On do A. Tedy uvažme bijekci $H : On \to \mathrm{Rng}(H)$, je to bijekce, tak existuje inverze, což je bijekce množiny do vlastní třídy, což je spor s axiomem nahrazení. ⊞

Cvičení 5 (PM implikuje WO)**.** $PM \Rightarrow WO$.

Důkaz. Mějme množinu X a chceme k ní najít dobré uspořádání. Uvažme uspořádání na dvojicích $(Y, \leq_Y)$, kde $\leq_Y$ je dobré uspořádání a $Y \subseteq X$. Pak $(Y, \leq_Y) \preceq (Y', \leq'_Y)$, pokud $Y \subseteq Y'$ a uspořádání spolu na Y souhlasí. Toto částečné uspořádání je neprázdné (pro jeden prvek triviálně).

Uvažme řetězec C. Pak $\overline{Y} = \bigcup_{(Y,\leq) \in C} Y, \overline{\leq} = \bigcup_{(Y,\leq) \in C} \leq$. To je horní mez, a tedy ze Zornova lemmatu máme maximální prvek $(Y, \leq_Y)$. Pak $Y = X$, protože pokud ne, tak můžeme přidat chybějící prvek jako maximum, což je spor s maximalitou. Takže máme dobré uspořádání na X. ⊞

Definice 2 (Ordinální funkce)**.** Třídové zobrazení F je ordinální funkce, pokud $(\mathrm{Dom}(F) = On \vee \mathrm{Dom}(F) \in On)$.

Dále F je

- rostoucí, pokud $a < b \to F(\alpha) < F(\beta)$

- neklesající, pokud $a \leq b \to F(\alpha) \leq F(\beta)$

Věta 8 (O ordinálních funkcích)**.**

1. Je-li F rostoucí ordinální funkce, pak $(\forall \alpha \in \mathrm{Dom}(F)) : F(\alpha) \geq \alpha$.
2. Je-li A dobře uspořádaná množina, $B \subseteq A$, α typ uspořádání A, β typ uspořádání B, pak $\beta \leq \alpha$.

Důkaz. 1: sporem: ať α je nejmenší ordinál, že $F(\alpha) < \alpha$. Pak ovšem $F(F(\alpha)) \leq F(\alpha)$, ale zároveň $F(\alpha) \leq F(F(\alpha))$, což je spor.

2: Nechť $j : A \to \alpha, k : B \to \beta$ izomorfismy (speciálně rostoucí zobrazení), jejich inverze jsou také rostoucí zobrazení a složení dvou rostoucích zobrazení je také rostoucí. Pak $h = k^{-1} \circ j \restriction B$ je také rostoucí z β do α. A pokud $\alpha < \beta$, pak $h(\alpha) \in \alpha$, a tedy máme spor s první částí věty. ⊞

Definice 3 (Uzavřená podmnožina)**.** Podmnožina/podtřída $X \subseteq On$ je uzavřená, pokud pro každou podmnožinu $Y \subseteq X$ platí $\sup Y \in X$.

Definice 4 (Spojitá ordinální funkce)**.** Rostoucí ordinální funkce F je spojitá, pokud pro každý limitní ordinál $\lambda \in \mathrm{Dom}(F)$ platí $F(\lambda) = \sup\{F(\alpha) : \alpha \in \lambda\}$.

Definice 5 (Normální ordinální funkce)**.** Ordinální funkce je normální, je-li rostoucí a spojitá.

Cvičení 6. Je-li F normální, pak vzor uzavřené množiny je tvaru $X \cap \mathrm{Dom}(F)$, kde X je uzavřená množina.

Důkaz. TODO ⊞

Cvičení 7. Je-li F normální ordinální funkce, λ limitní ordinál, pak $F(\lambda)$ je limitní ordinál.

Důkaz. Sporem nechť $F(\lambda)$ není limitní ordinál. Pak tedy $F(\lambda) = \beta + 1$. Potom ze spojitosti F víme, že $F(\lambda) = \sup\{F(\alpha) : \alpha < \lambda\}$. Ovšem jelikož F není limitní, tak $\exists \alpha \in \lambda : F(\alpha) = \beta + 1$. Tedy $\alpha < \lambda$ a $F(\alpha) < F(\lambda)$, což je spor s rostoucností. ⊞

Lemma 2 (Normální funkce je rozumně shora omezená)**.** Je-li F normální funkce, pak pro každý ordinál β splňující $F(0) \leq \beta < \sup \mathrm{Rng}(F)$ existuje největší ordinál α, pro který $F(\alpha) \leq \beta$.

Důkaz. Uvažme $[0, \beta] = \beta \cup \{\beta\}$, což je uzavřená množina, pak i $F^{-1}[[0, \beta]]$ je uzavřená množina, tady má největší prvek α. ⊞

Cvičení 8 (Skládání normálních funkcí)**.** Složení normálních funkcí je normální funkce.

Důkaz. Rostoucnost je zdarma: f, g rostoucí, pak $\alpha < \beta \to f(\alpha) < f(\beta) \to g(f(\alpha)) < g(f(\beta))$.

Spojitost: mějme λ limitní ordinál. Pak $g(f(\lambda)) = \sup\{g(\alpha) : \alpha < f(\lambda)\} = \sup\{g(\alpha) : \alpha < \sup\{f(\beta) : \beta \in \lambda\}\}$ ⊞

Definice 6 (Pevný bod)**.** Řekneme, že ξ je pevným bodem ordinální funkce F, pokud $F(\xi) = \xi$.

Věta 9 (O pevných bodech normální funkce)**.** Je-li $F : On \to On$ normální funkce, pak

1. $\forall \alpha \in On \exists \beta \in On : \beta \geq \alpha$, který je pevným bodem F. Přesněji: definujeme-li rekurzivně posloupnost $(\alpha_n : n < \omega)$ jako $\alpha_0 = \alpha, \alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$, pak nejmenší pevný bod $\xi \geq \alpha$ funkce G je rovný $\sup\{\alpha_n : n < \omega\}$.
2. Třída všech pevných bodů je uzavřená.

Důkaz. 1: Pokud je posloupnost pro nějaké i „konverguje“, takže $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, máme to automaticky. Pokud ale je posloupnost „nekonečně rostoucí“, tak mějme $\beta = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Pak $F(\beta) = \sup\{F(\alpha_n), n \in \omega\} = \sup\{\alpha_{n+1} : n \in \omega\} = \sup\{\alpha_n, n \in \omega\} = \beta$, ktde první a třetí(?) rovnost plynou z normality funkce.

Minimalita β: Nechť $\alpha \leq \xi < \beta$ – existuje $\alpha_n \leq \xi < \alpha_{n+1} = F(\alpha_n) \leq F(\xi)$, což je spor.

2: Sporem, ať není: pak mějme F funkci a X (pod)množinu jejích pevných bodů. Pak nechť $\beta = \sup X$. Pak $F(\beta) = F(\sup X) = \sup X = \beta$. ⊞

Důsledek 1 (Izomorfismus mezi ordinály a pevnými body)**.** Existuje izomorfismus $J : On \to K(F) = \{\xi \in On : F(\xi) = \xi\}$, navíc tento izomorfismus je normální funkce.

Definice 7 (Ordinální součet)**.** Součet ordinálů α a β je ordinál, který je typem množiny $(\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times\beta)$ při lexikografickém uspořádání.

Definice 8 (Ordinální součin)**.** Součin ordinálů α a β je ordinál, který je typem množiny $\beta\times\alpha$ při lexikografickém uspořádání.

Lemma 3 (Jednoduché vlastnosti součtu a součinu)**.** Pro α,β,γ ordinály:

- $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$
- $\alpha+0=\alpha=0+\alpha$
- $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$
- $\alpha\cdot 0=0=0\cdot\alpha$
- $\alpha\cdot 1=1=1\cdot\alpha$
- $\alpha\cdot 2=\alpha+\alpha$
- $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

Ovšem také:

- $1+\omega=\omega\neq\omega+1$
- $2\cdot\omega=\omega\neq\omega\cdot 2$

Lemma 4 (Monotonie součtu)**.** Pro α,β,γ ordinály:

- $\alpha<\beta\rightarrow\gamma+\alpha<\gamma+\beta$
- $\alpha\leq\beta\rightarrow\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$

Lemma 5 (Monotonie součinu)**.** Pro α,β,γ ordinály:

- pokud $\gamma>0$, pak $\alpha<\beta\rightarrow\gamma\cdot\alpha<\gamma\cdot\beta$
- $\alpha\leq\beta\rightarrow\alpha\cdot\gamma\leq\beta\cdot\gamma$

Lemma 6 (Distributivita zleva)**.** Pro α,β,γ ordinály: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. ALE: $(1+1)\cdot\omega=\omega\neq\omega+\omega$

Lemma 7 (Existence pravého rozdílu)**.** Je-li $\alpha\leq\beta$, pak existuje právě jeden ordinál ρ takový, že $\beta=\alpha+\rho$.

Příklad 1. $x+0=\omega$ - $x=\omega$ $x+5=\omega$ - nemá řešení $5+x=\omega$ - $x=\omega$ $x+\omega=\omega$ - $x\in\omega$

Lemma 8 (Dělení se zbytkem)**.** Je-li $\beta>0$, α,β ordinály, pak existují jednoznačně určené ordinály $\delta\leq\alpha,\rho<\beta$ takové, že $\alpha=\beta\cdot\delta+\rho$.

Věta 10 (Spojitost $+,\cdot$)**.** $\forall\alpha\in On$ je ordinální funkce $F(x)=\alpha+x$ normální. Pro $\alpha>0$ je ordinální funkce $F(x)=\alpha\cdot x$ normální.

Definice 9 (Mocnina ordinálů)**.** α^β definujeme rekurzivně:

- $\alpha^0=1$
- $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha$
- pro β limitní: $\alpha^\beta=\sup\{\alpha^\gamma:\gamma<\beta\}$.

Lemma 9 (Vlastnosti mocniny)**.** $0^1=0^0\cdot 0=0$ $0^\beta=0$ pro $\beta>0$ $1^\beta=1$ $\alpha^1=\alpha$

Lemma 10 (Monotonie ordinální mocniny)**.**

- $\alpha\leq\beta\rightarrow\alpha^\gamma\leq\beta^\gamma$
- $(\alpha>1\wedge\beta<\gamma)\rightarrow\alpha^\beta<\alpha^\gamma$.

Lemma 11 (Spojisto mocniny)**.** Pro $\alpha > 1$ je $F(x) = \alpha^x$ normální ordinální funkce. Navíc

- $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$
- $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

Pozn. $(\omega, +, 1, +, \cdot)$ je standardní model Peanovy aritmetiky.

Lemma 12. Nechť $k, m_0, m_1, \ldots, m_k \in \omega$ a $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k < \delta$. Pak $\omega^\delta > \omega^{\gamma_0} \cdot m_0 + \omega^{\gamma_1} \cdot m_1 + \ldots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k$.

Věta 11 (O rozvoji ordinálu v mocninách ω)**.** $\forall \alpha \in On, \alpha > 0$ existují jednoznačně určená přirozená čísla $k, m_0, \ldots, m_k \in \omega \setminus \{0\}$ a ordinály $\gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_k$ takové, že $\alpha = \omega^{\gamma_0} \cdot m_0 + \omega^{\gamma_1} \cdot m_1 + \ldots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k$. Tomu říkáme Cantorův normální tvar.

Důsledek 2 (Důsledky existence Cantorova normálního tvaru)**.**

1. Pokud $\alpha > 0$, pak existuje právě jedno l a jednoznačné $\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \ldots \geq \gamma_k$ takové, že $\alpha = \omega^{\gamma_0} + \omega^{\gamma_1} + \ldots + \omega^{\gamma_k}$.
2. existují jednoznačně určené ordinály $\beta, \gamma \in On : \alpha = \omega^\gamma(\beta + 1)$.

Definice 10 (ε-číslo, ε_0)**.** Pevný bod funkce $F(x) = \omega^x$ nazveme ε-číslem.

ε_0 je nejmenší ε-číslo ($\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$), stále se jedná o spočetný kardinál

Definice 11 (Herkules a hydra)**.** Hydra je zakořeněný strom, hlava hydry je list stromu.

Bitva: po kolech: v n-tém kole Herkules usekne jednu hlavy hydry a z prarodiče useknuté hlavy vyroste n kopií podstromu (bez useknuté hrany). Když usekne hlavu u kořene, nic nevyroste. Herkules vyhraje, pokud umí hyfru zbavit všech hlav, hydra vyhraje, pokud přežije nekonečně dlouho.

Věta 12 (Herkules vždy vyhraje)**.** Každá Herkulova strategie je vyhrávající.

Důkaz. Máme-li strom, přiřadíme mu α následovně: listy mají 0. Vnitřní vrcholy mají hodnotu $\omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n} : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$, kde α_i jsou hodnoty jejich „synů“. Ordinál hydry je hodnota kořene.

Stačí ověřit, že $\forall 0 < \alpha < \varepsilon_0 : [\alpha]_\sigma(n) < \alpha$. ⊞

Věta 13 (PA nemůže dokázat Herkulovu výhru)**.** V Peanově aritmetice nelze dokázat, že každá Herkulova strategie je vyhrávající.

Definice 12 (Goodsteinova posloupnost)**.** Nechť m_0 je přirozené číslo. Pak Goodsteinova posloupnost je definována následovně: m_0 je fixované, a m_{n+1} z m_n vytvoříme tak, že úplně vyjádříme m_n podle základu $n + 2$ (tj. i mocniny rozepíšeme podle základu 2), a všechny výskyty čísla $n + 2$ nahradíme číslem $n + 3$.

Věta 14 (Goodsteinova věta)**.** $\forall m_O \in \omega \exists n \in \omega : m_n = 0$.

Důkaz. Myšlenka: sestrojíme posloupnost ordinálů $\mu_0, \ldots$ takovou, že $\mu_n > 0 \to \mu_{n+1} < \mu_n$ a $\forall n \in \omega : m_n \leq \mu_n$.

Definujeme:

- $e : \omega \times \omega \times On \to On$ – změna základu z n na x: $e(0, n, x) = 0$, $m = \sum_{i=0}^k n^i \cdot p_i : e(m, n, x) = \sum_{i=0}^k x^{e(i,n,x)} \cdot p_i$.
- $G_m : \omega \to \omega$ – „jeden krok Goodsteinovy posloupnosti“, chceme $m_{n+1} = G_{n+2}(m_n) : G_n(0) = 0, G(n, m) = e(m, n, n + 1) - 1$.
- $O_n : \omega \to On$ – „nahrazení základu n základem ω“: $O_n(0) = 0, O_n(m) = (e, m, n, \omega)$, platí $O_n(m) < \varepsilon_0$
- $\langle\rangle : \varepsilon_0 \times \omega \to \varepsilon$ – „simulace odečtení 1 od ordinálu“: $\langle 0\rangle(n)0, \langle\beta + 1\rangle(n) = \beta$, pro α limitní: $\alpha = \omega^\delta(\beta + 1) : \langle\alpha\rangle(n) = \omega^\delta \cdot \beta + \omega^{\langle\delta\rangle(n)} \cdot n + \langle\omega^{\langle\delta\rangle(n)}\rangle(n)$ - funguje pro $\alpha < \varepsilon_0$.

Zpozorujeme, že $0 < \alpha < \varepsilon_0 \to \langle\alpha\rangle(n) < \alpha$, což ukážeme indukcí: mějme $\alpha = \omega^\delta \cdot (\beta+1), \varepsilon = \langle\delta\rangle(n)$. Pak $\langle\alpha\rangle(n) = \omega^\delta \cdot \beta + \omega^\varepsilon \cdot n + \langle\omega^\varepsilon\rangle(n)$. Neboť $\delta < \alpha$, máme z IP, že $\varepsilon = \langle\delta\rangle(n) < \delta$, tedy $\omega^\varepsilon < \omega^\delta < \alpha$, tedy $\langle\omega^\varepsilon\rangle(n) \overset{IP}{<} \omega^\varepsilon$.

Tedy $\langle\alpha\rangle(n) < \omega^\delta \cdot \beta + \omega^\varepsilon(n+1) < \omega^\delta \cdot \beta + \omega^\varepsilon \cdot \omega < \omega^\delta \cdot \beta + \omega^\delta = \omega^\delta(\beta+1) = \alpha$.

Pomocné lemma: pro $\alpha < \varepsilon_0, m, n, \in \omega$: $m, n > 0 \to O_{n+1}(m-1) = \langle O_{n+1}(m)\rangle(n)$, důsledkem je, že pro $n > 1$ $\langle O_n(m)\rangle(n) = O_{n+1}(G_n(m))$.

Důkaz lemmatu: indukcí podle m: nechť $m = \sum_{i=0}^k (n+1)^i \cdot p_i$ a mějme j nejmenší index že $p_j > 0$.

Je-li $j = 0$, pak $O_{n+1}(m)$ je izolovaný ordinál, mějme $\alpha = \beta + 1$. Pak $\langle O_{n+1}(m)\rangle(n) = \beta(\ldots + p_0 - 1)$, tedy $O_{n+1}(m-1) = O_{n+1}(\sum_{i=1}^k n^i \cdot p_i + p_0 - 1) = \beta$

Je-li $j > 0$, pak $O_{n+1}(m-1)$: $m - 1 = \sum_{i=j+1}(n+1)^i \cdot p_i + (n+1)^j \cdot p_j - 1 = \sum_{i=j+1}(n+1)^i \cdot p_i + (n+1)^j \cdot (p_j - 1) + (n+1)^j - 1 = \sum_{i=j+1}(n+1)^i \cdot p_i + (n+1)^j \cdot (p_j-1) + (n+1)^{j-1} \cdot n + (n+1)^{j-1} - 1$. Pak $O_{n+1}(m-1) = \sum \omega^{e(i,n+1,\omega)} \cdot p_i + \omega^{e(j,n+1,\omega)} \cdot (p_j - 1) + \omega^{O_{n+1}(j-1)} \cdot n + O_{n+1}((n+1)^{j-1} - 1)$.

Celkem tedy $O_{n+1}((n+1)^j \cdot p_j - 1) =$

Potom tedy z lemmatu označíme $\mu_n = O_{n+2}(m_n) = e(m_n, n, \omega) \geq m_n$. Pak $\mu_{n+1} = O_{n+3}(m_{n+1}) = O_{n+3}(G_{n+2}(m_n)) = \langle O_{n+2}(m_n)\rangle(n+2) = \langle\mu_n\rangle(n+2) < \mu_n$.

⊞

Věta 15 (PA nemůže dokázat Goodsteinovu větu)**.** Goodsteinovu větu nelze dokázat v Peanově aritmatice.

Definice 13 (Fundamentální posloupnost limitního ordinálu)**.** Fundamentální posloupnost limitního ordinálu $\alpha < \varepsilon_0$ je rostoucí posloupnost $\alpha[0], \alpha[1], \ldots$ taková, že $\alpha = \sup\{\alpha[n] : n \in \omega\}$.

Je-li $\alpha = \alpha' + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$, α_k je minimální exponent v Cantorově normálním tvaru, pak

- pro α_k limitní je $\alpha[n] = \alpha' + \omega^{\alpha_k} \cdot (n_k - 1) + \omega^{\alpha_k[n]}$
- pro α_k izolované je $\alpha[n] = \alpha' + \omega^{\alpha_k} \cdot (n_k - 1) + \omega^{\alpha_k - 1} \cdot (n+1)$

Příklad: $\omega[n] = n+1, \omega^\omega[n] = \omega^{n+1}, \omega^{k+1} = \omega^k \cdot (n+1)$.

Definice 14 (Hardyova hierarchie)**.** Pro $\alpha < \varepsilon_:$ definujeme induktivně $H_\alpha : \omega \to \omega$.

- $H_0(n) = n$
- $H_{\alpha+1} = H_\alpha(n+1)$
- pro α limitní $H_\alpha(n) = H_{\alpha[n]}(n)$.
- $H_{\varepsilon_0}(n) = H_{\gamma_n}(n)$, kde γ_n je $\omega^{\omega^{\cdots}}$, kde n je výška věžové funkce.

Příklad: $H_\omega(n) = 2n + 1$.

Cvičení: $H_{\omega+\omega}(n), H_{\omega\cdot k}(n), H_{\omega\cdot\omega}(n), H_{\omega^\omega}(n)$

Platí: Je-li $f : \omega \to \omega$ rekurzivní funkce a v PA je dokazatelné, že f je totální, pak existuje $\alpha < \varepsilon_0$ taková, že $f \in o(H_\alpha)$. V PA nelze dokázat, že H_{ε_0} je totální.

Definice 15 (Rychle rostoucí hierarchie (Wainerova–Löbova))**.** Pro $\alpha < \varepsilon_0$: definujeme induktivně f_α : $\omega \to \omega$:

- $f_0(n) = n + 1$
- $f_{\alpha+1}(n) = f_\alpha^{(n)}(n)$, tedy f_α aplikovaná n-krát
- pro α limitní je $f_\alpha(n) = f_{\alpha[n]}(n)$

Platí: $f_\alpha \sim H_{\omega^\alpha}$. Primitivní funkce lze od určitého n_0 shora omezit nějakou f_n pro $n \in \omega$.

Definice 16 (Goodsteinova funkce)**.** Goodsteinova funkce $\mathscr{G}(n)$ je délka Goodsteinovy posloupnosti začínající $m_0 = n$.

Platí: $\mathscr{G}(n) \sim f_{\varepsilon_0} \sim H_{\varepsilon_0}$. $PA \vdash (\exists m)(\mathscr{G}(n) = m)$ pro fixní n, ale $PA \nvdash (\forall n)(\exists m)(\mathscr{G}(n) = m)$.

Dále platí: je-li $n = 2^{m_1} + \ldots + 2^{m_k} : m_1 > m_2 > \ldots > m_k$, pak $\mathscr{G}(n) f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\ldots f_{\alpha_k}(3))) - 2$, kde $\alpha_i = e(m_i, 2, \omega) = O_2(m_i)$.

Definice 17 (Kardinální číslo a reprezentace mohutnosti)**.** Lze-li x dobře uspořádat, pak $|x|$ je nejmenší prvek množiny $On \cap \{y : y \approx x\}$.

κ je kardinální číslo (kardinál), je-li κ ordinál, který nelze prostě zobrazit na žádný menší ordinál.

Třídu všech kardinálních čísel značíme $Cn = \{\kappa \in On : (\forall \alpha < \kappa)(\alpha \not\approx \kappa)\}$.

Kardinály typicky značíme písemky zprostřed alfabety: $\kappa, \lambda, \mu, \nu$. Kardinál je mohutnost množiny x, značíme $|x| = \kappa$, pokud $x \approx \kappa$.

Lemma 13 (Kardinály jsou uzavřené)**.** Cn je uzavřená třída (tj. je-li $X \subseteq Cn$, pak $supX \in Cn$).

Důkaz. $\sigma = \sup X = \bigcup X \in On$ Nechť $\alpha < \sigma$, tedy $\alpha \in \bigcup X$, tedy $\exists \kappa \in X : \alpha < \kappa \subseteq \sigma$. Neboť κ je kardinál, neexistuje prosté zonrazení z κ do α, tedy nemůže ani existovat prosté zobrazení z σ do α. ⊞

Věta 16 (Kardinálů je hodně)**.**

1. Ke každému kardinálu existuje ještě větší kardinál.
2. C_n je vlastní třída.

Důkaz. 1: Sporem: nechť κ je největší kardinál. Pak pro každý ordinál $\alpha > \kappa$ existuje prosté zobrazení α na κ (bijekce). Tedy κ lze dobře uspořádat oplde typu α, pro $\alpha \neq \alpha'$ tato uspořádání jsou neizomorfní. Ovšem každé dobré uspořádání na κ je podmnožinou $\kappa \times \kappa$, a tedy náleží do $\mathcal{P}(\kappa \times \kappa)$. Nechť $R_\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa \times \kappa))$ je množina všech dobrých uspořádání podle α: zobrazení $R : \alpha \mapsto R_\alpha$ tak, že $R : On - \kappa \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa \times \kappa))$ je prosté.

Vezmeme inverzní zobrazení $R^{-1} : \mathrm{Rng}(R) \to On - \kappa$ - zobrazuje množinu na vlastní třídu, což je spor se schématem axiomu nahrazení.

2: Pokud by C_n byla množina, pak $\sup Cn$ je kardinál, ale to je spor s jedničkou. ⊞

Definice 18 (Následník kardinálu)**.** Nechť $\kappa \in Cn$. Následník kardinálu κ je κ^+: nejmenší kardinál $\lambda > \kappa$. Pak κ je předchůdce kardinálu λ.

Definice 19 (Limitní kardinál)**.** Nechť $\lambda \in Cn$. Řekneme, že λ je limitní kardinál, pokud nemá předchůdce.

Důsledek 3 (O existenci alefu)**.** $Cn - \omega$ je dobře uspořádaná vlastní třída, existuje jednoznačně určená normální funkce $\aleph : On \to C_n - \omega$.

Definice 20 (Alef)**.** $\aleph_\alpha = \aleph(\alpha)$.

Pozorování (O limitnosti $\aleph_\alpha$)**.** $\aleph_0$ je limitní kardinál, pro $\alpha > 0 \aleph_0$ je limitní, právě když α je limitní.

Důsledek 4 (O alefech)**.** Značíme $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$.

1. $\alpha \leq \aleph_\alpha$
2. ω_α je limitní ordinál $\forall \alpha$.
3. je-li $\xi \in On$ limitní, pak $\aleph_\xi = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \xi\}$.

Věta 17 (Kartézský součin alefů je velký alef)**.** Pro každé $\alpha \in On$ platí, že $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha$.

Důkaz. Transfinitní indukcí podle α: Pro $\alpha = 0$: $|\omega \times \omega| = \omega$ - maximo-lexikografické uspořádání.

Pro $\alpha > 0$: uvážíme maximo-lexikografické uspořádání na $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$, to je dobré, a tedy je izomorfní právě jednomu ordinálu ν. Ukážeme, že $\nu = \omega\alpha$ Jistě $\omega_\alpha \preceq \nu \approx \omega_\alpha \times \omega_\alpha$, neboť ω_α je kardinál, máme $\omega_\alpha \leq \nu$.

Sporem nechť $\omega_\alpha < \nu$. Pak $\omega\alpha \in \nu$, a tedy ω_α je izomorfní dolní množině určené $(\gamma, \delta) \in \omega_\alpha \times \omega_\alpha$. Beru $\xi = \max(\gamma, \delta) + 1$. Pak $(\leftarrow, (\gamma, \delta)) \subseteq \xi \times \xi$. Neboť $\xi \in \omega_\alpha$, máme $\xi < \omega_\alpha$, tedy $|\xi| < \omega_\alpha$, tedy $|\xi| = \omega_\beta$ pro $\beta < \alpha$. Z IP: $|\xi \times \xi| = |\xi| = \omega_\beta < \omega_\alpha$, ale $|(\leftarrow, (\gamma, \delta))| = \omega_\alpha$, což je spor, neboť $(\leftarrow, (\gamma, \delta)) \subseteq \xi \times \xi$. Tedy $\omega_\alpha = \nu$. ⊞

Definice 21 (Kardinální součet a součin)**.** Pro kardinály $\kappa, \lambda \in Cn : \kappa + \lambda = |(\{0\} \times \gamma) \cup (\{1\} \times \lambda)|, \kappa \cdot \lambda = |\lambda \times \kappa|$.

Pozorování (O kardinálním součtu a součinu)**.** Kardinální součet i součin jsou asociativní, komutativní, distributivní. Na přirozených číslech se shodují se sčítáním a násobením ordinálů i ze ZŠ.

Věta 18 (O součtu a součinu kardinálů)**.** 1. $\alpha, \beta \in On : \aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$

2. $\kappa, \lambda \in Cn$, aspoň jeden z nich je nekonečný, potom $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

3. Jsou-li κ i λ nenulové, pak $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Důkaz. První část plyne z následujících dvou. $\kappa + \lambda \geq \max(\kappa, \lambda), \kappa \cdot \lambda \geq \max(\kappa, \lambda)$ triviálně.

„$\leq$“: $\mu := \max(\kappa, \lambda)$. Máme $\mu \preceq (\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \lambda) \preceq 2 \times \mu \approx \mu$. Stejně tak $\mu \preceq \kappa \times \lambda \preceq \mu \times \mu \approx \mu$. ⊞

Definice 22 (Kofinální množina)**.** Buď X množina částečně uspořádaná relací $\leq$. Množina $Y \subseteq X$ je kofinální s X (je kofinální podmnožinou) vzhledem k $\leq$, pokud $\forall x \in X : \exists y \in Y : x \leq y$.

Pozorování (O kofinalitě)**.** Y obsahuje všechna maxima $(X, \leq)$, největší prvek X je sám o sobě kofinální podmnožinou.

„být kofinální podmnožinou“ je tranitivní relace.

Definice 23 (Kofinál)**.** Je-li α limitní ordinál, pak *kofinál* α je nejmenší ordinál β, která je typem nějaké podmnožiny množiny α, která je kofinální s množinou α. Značíme $\mathrm{cf}(\alpha)$.

Příklad 2 (Příklady kofinálů)**.**
- $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$
- $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega : \{\aleph_a : a \in \omega\}$
- $\mathrm{cf}(\omega + \omega) = \omega$
- $\mathrm{cf}(\omega \cdot \omega) = \omega$
- $\mathrm{cf}(\omega^\omega) = \omega$

Cvičení 9 (Kofinál spočetného ordinálu je ω)**.** Pro každý spočetný ordinál α je $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$.

Důkaz. TODO ⊞

Cvičení 10 (Kofinál alefu)**.** Pro každý limitní ordinál α je $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Důkaz. TODO ⊞

Lemma 14 (Kofinály limitních ordinálů)**.** Je-li α limitní ordinál, pak:

1. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$
2. $\mathrm{cf}(\alpha)$ je nekonečný kardinál

Důkaz. První část: $\beta = \mathrm{cf}(\alpha), \gamma = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$, tedy $\gamma \leq \beta$. Tedy existuje rostoucí ordinální funkce $f : \beta \to \alpha, \mathrm{Rng}(f)$ je kofinální podmnožina množiny α. Analogicky $g : \gamma \to \beta, Rng(g)$ je kofinální podmnožina množiny β. Složení $g \circ f : \gamma \to \alpha$ je rostoucí ordinální funkce (f, g jsou obě rostoucí) zobrazující γ na kofinální podmnožinu množiny α. Tedy $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \gamma$, a tedy $\beta = \gamma$.

Druhá část: sporem: nechť $\exists \kappa < \mathrm{cf}(\alpha), \kappa \in Cn$ a bijekce $f : \kappa \to \mathrm{cf}(\alpha)$. Definujeme $\kappa \to \mathrm{cf}(\alpha)$ jako $g(\beta) := \sup(f[\beta] \cup f(\beta))$. g je neklesající a $\mathrm{Rng}(g)$ je kofinální podmnožinou $\mathrm{cf}(\alpha)$. Mějme tedy γ ordinální typ $\mathrm{Rng}(g)$.

Ukážeme, že $\gamma \leq \kappa$: pomocí g najdeme bijekci mezi $\mathrm{Rng}(g)$ a podmnožinou κ (označíme λ). Navíc dokonce stačí prostá funkce: máme-li $y \in \mathrm{Rng}(g)$, pak $y \mapsto \min\{x : x \in \kappa \wedge g(x) = y\}$ (též $g^{-1}(y)$). Víme, že typ λ je γ, tedy $\gamma \leq \kappa$.

Existuje rostoucí zobrazení $h : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ takový, že $\mathrm{Rng}(\alpha)$ je kofinální s α. $h[\mathrm{Rng}(g)]$ je opět kofinální s α a je též typu γ. Pak $\gamma \leq \kappa < \mathrm{cf}(\alpha)$, což je spor s definicí kofinálu. Tedy $\mathrm{cf}(\alpha)$ musí být kardinál. ⊞

Definice 24 (Regulární/singulární kardinál)**.** Je-li κ nekonečný kardinál, pak řekneme, že κ je

- regulární kardinál, pokud $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$
- singulární kardinál, pokud $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$

Důsledek 5 (Kofinály jsou regulární)**.** $\mathrm{cf}(\alpha)$ je regulární kardinál.

Poznámka (Bezespornost jediného regulárního kardinálu)**.** V ZF je tvrzení „$\aleph_0$ je jediný regulární kardinál“ bezesporné (Gitik).

Věta 19 (Singularita nekonečného kardinálu)**.** Nekonečný kardinál κ je singulární, právě když je sumou méně než κ množin mohutnosti menší než κ.

Důkaz. „$\Rightarrow$“: κ je singulární,, tedy $\exists X \subseteq \kappa$ kofinální s κ typu $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Pak $\sup X = \kappa \Leftrightarrow \bigcup X = \kappa$, a tedy $|X| = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ a $\forall x \in X : |x| < \kappa$, kde první ekvivalence plyne ze shodovánísuprema a sumy v ordinálech a x jsou množiny ordinálů, tedy mají mohutnost.

„$\Leftarrow$“: Je-li $\kappa = \bigcup X, |X| < \kappa, \forall x \in X : |x| < \kappa$, máme dvě možnosti. První možnost je, že $\exists x \in X : x$ je kofinální s κ. Z toho rovnou $\mathrm{cf}(\kappa) \leq |x| < \kappa$, tedy κ je singulární.

Jinak oznaíme $Y := \{\sup x : x \in X\}$, což je kofinální podmnožina κ. Jistě $|Y| \leq |X|$: máme zobrazené X na Y a díky dobrému uspořádání X máme dokonce i $Y \preceq X$. Pak $|X| \leq \kappa$, a tedy $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \kappa$. ⊞

Důsledek 6 (Zobecněný Dirichletův princip)**.** J-li κ regulární kardinál a $\kappa = \bigcup X, |X| < \kappa$, pak existuje $x \in X : |x| = \kappa$.

Lemma 15 (Sjednocování alef alfa (AC))**.** Je-li $|X| \leq \aleph_\alpha$ a $\forall x \in X : |x| \leq \aleph_\alpha$, pak $|\bigcup X| \leq \aleph_\alpha$

Důkaz. Prostě zobrazíme $\bigcup X$ do $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$. Z předpokladu existuje prosté zobrazení $f : X \to \omega_\alpha$ a pro každé $x \in X$ je množina c_x všech prostých zobrazení množiny x do ω_α neprázdná. Selektor na množině $C = \{c_x : x \in X\}$ pak ke každému $x \in X$ vybere nějaké prosté zobrazení $g_x : x \to \omega_\alpha$. Prosté zobrazení $h : \bigcup X \to \omega_\alpha \times \omega_\alpha$ definujeme tak, že libovolnému $y \in \bigcup X$ přiřadíme hodnotu $h(y) = (\delta, g_x(y))$ pro δ nejmenší ordinál takový, že $y \in x$ a $f(x) = \delta$. ⊞

Věta 20 (O regulárních kardinálech (AC))**.** Pro každé ordinální číslo α je $\aleph_{\alpha+1}$ regulární kardinál.

Důkaz. Sporem: je-li $\aleph_{\alpha+1}$ singulární, existuje kofinální podmnožina $X \subseteq \omega_{\alpha+1}$ mohutnosti $\leq \aleph_\alpha$. Navíc každý prvek X má mohutnost $\leq \aleph_\alpha$, $\omega_{\alpha+1} = \bigcup X$, tedsy dle lemmatu $|\bigcup X| \leq \aleph_\alpha$, což je spor: $|\bigcup X| = \aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\alpha$. ⊞

Definice 25 (Nedosažitelné kardinály)**.** Kardinál κ je

- slabě nedosažitelný, je-li nespočetný, limitní a regulární
- nedosažitelný, je-li slabě nedosažitelný a navíc $\forall \lambda < \kappa : 2^\lambda < \kappa$

Axiom 2 (Hypotéza kontinua (CH))**.** $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Axiom 3 (Zobecněná hypotéza kontinua (GCH))**.** $\forall \alpha \in On : 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Cvičení 11. Každý nekonečný singulární kardinál κ je supremem $\mathrm{cf}(\kappa)$ regulárních kardinálů.

Definice 26 (Kardinální mocnina)**.** Pro $\kappa, \lambda \in Cn : \kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$

Cvičení 12. $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu, (\kappa^\mu)^\nu = \kappa^{\mu\times\nu}$.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 21 (O kardinální mocnině)**.** Nechť κ, λ jsou kardinální čísla. Pak

1. $0^0 = 1, \lambda > 0 \to 0^\lambda = 0, \kappa^0 = 1$
2. $\omega \leq \kappa \wedge 0 < \lambda < \omega$. Pak $\kappa^\lambda = \kappa$.
3. $2 \leq \kappa \leq \lambda \wedge \omega \leq \lambda$, pak $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

Důkaz.
1. Rozepsat
2. Rozepsat - indukcí podle n (λ).

3. $\kappa^\lambda \geq 2^\lambda$ z monotonie. $\kappa^\lambda \leq 2^\lambda$: ${}^\lambda\kappa \subseteq \mathcal{P}(\lambda \times \kappa)$. Tedy $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq 2^{\lambda \cdot \kappa} \leq 2^\lambda$.

$\boxplus$

Definice 27 (Kontinuum)**.** Kardinál $2^\omega = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\omega)|$ nazýváme mohutností kontinua.

Definice 28 ((Nekonečný) součet a součin souboru kardinálů)**.** Je-li $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ je soubor kardinálů indexovaný množinou I (zkratka pro funkci $I \to Cn$).

$\sum_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup(\{i\} \times \kappa_i)|$, $\prod_{i \in I} \kappa_i = |\bigtimes_{i \in I} \kappa_i|$.

Definice 29 (Množina podmnožin dané velikosti)**.** Nechť X je množina, λ je kardinál. Pak $[X]^\lambda = \{x \subseteq X : |x| = \lambda\}, [X]^{<\lambda} = \{x \subseteq X : |x| < \lambda\}$.

Lemma 16 (O velikosti množiny podmnožin)**.** Je-li $|X| = \kappa \geq \omega, \lambda \in Cn$, pak

1. pro $\lambda \leq \kappa$ je $|[X]^\lambda| = \kappa^\lambda$
2. pro $\lambda \leq \kappa^+$ je $|[X]^{<\lambda}| = \sum_{\mu < \lambda} \kappa^\mu$.

Důkaz. Z jedničky plyne dvojka: $[X]^{<\lambda} = \bigcup_{\mu < \lambda} [X]^\mu$.

Jednička: Bez újmy na obecnosti nechť $X = \kappa$. Pak $\geq$: ${}^\lambda\kappa \subseteq [\lambda \times \kappa]^\lambda$, tedy $kappa^\lambda \leq [\kappa]^\lambda$. Naopak $\leq$: chceme λ-prvkové podmnožině $x \subseteq [X]^\lambda$ přiřadit $f_x : \lambda \to X$, která je bijekcí. Pomocí AC se nám to podaří. $\boxplus$

Definice 30 (Slabá mocnina)**.** Pro $\kappa, \lambda \in Cn$: slabou mocninou $\kappa^{<\lambda} = \sum_{\mu < \lambda} \kappa^\mu$.

Lemma 17 (Výpočet nekonečného součtu)**.** Buď $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ soubor kardinálních čísel, $\kappa_i > 0$. Je-li $|I|$ nebo nějaké κ_i nekonečné, pak $\sum_{i \in I} \kappa_i = \max(|I|, \sup\{\kappa_i : i \in I\})$

Důkaz. „$\leq$“: $\kappa = \sup_{i \in I} \kappa_i$. Pak $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq |I \times \kappa| = \max(|I|, \kappa)$

„$\geq$“: $|I| = \sum_{i \in I} 1 \leq \sum \kappa_i$, navíc $\forall j : \kappa_j \leq \sum \kappa_i$, tedy $\kappa \leq \sum \kappa_i$. $\boxplus$

Důsledek 7 (O velikosti sjednocení)**.** Jsou-li X_i množiny mohutností $|X_i| = \kappa_i$ a $\sup\{\kappa_i : i \in I\}$ je kardinál $\geq |I|, \geq \omega$. Pak $|\bigcup_{i \in I} X_i| = \sup\{X_i : i \in I\} = \sum \kappa_i$.

Důsledek 8 (O singularitě kardinálu)**.** κ je singulární kardinál, právě když existují kardinály $\lambda < \kappa : \kappa_i < \kappa, i < \lambda$ takové, že $\kappa = \sum_{i < \lambda} \kappa_i$.

Lemma 18 (Součet a součin)**.** Buď $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ soubor, kde $\kappa_i \geq 2$. Pak $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \kappa_i$.

Důkaz. (Náznak):

- $|I| = 0 : \sum = 0, \prod = 1$.
- $|I| = 1 : \sum = \kappa_i = \prod$.
- $|I| = 2$: součet: prostě počítáme z definice dvě věci. součin: všechno kromě nul dáme na souřadnice, jednu nulu dáme na $(0, 0)$, druhou na $(1, 1)$.
- $|I| \geq 3 : \kappa_i \setminus \{0\} \mapsto (0, \ldots, 0, \kappa_i, 0, \ldots, 0)$, i-tá souřadnice je jediná nenulová - jakoby i-tá hrana kvádru. Pak $0 \in \kappa_i \mapsto (1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1)$, nula na i-té souřadnici.

$\boxplus$

Věta 22 (Königova nerovnost)**.** Nechť $I \neq \emptyset : \forall i \in I : \kappa_i < \lambda_i$. Pak $\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$.

Důkaz. Je-li $\lambda_i = 1$, pak $\kappa_i = 0$, a všechny tyto indexy můžeme vynechat, takže máme indexy i takové, že $\lambda_i \geq 2$. Pak $\sum \kappa_i \leq \sum \lambda_i \overset{\text{lemma}}{\leq} \prod \lambda_i$.

Zbývá ostrost: dokážeme sporem diagonální metodou: nechť $\sum_{\kappa_i} = \prod \lambda_i$. Tedy $\bigtimes_{i \in I} \lambda_i = \bigcup_{i \in I} X_i$ pro X_i disjunktní a $|X_i| = \kappa_i$. Nechť $Y_i = \{f(i) : f \in X_i\}$. Pak $|Y_i| \leq |X_i| = \kappa_i < \lambda_i$, tedy $\lambda_i \setminus Y_i \neq \emptyset$. Definujeme funkci $g \in \bigtimes_{i \in I} \lambda_i$ jako $g(i) = \min(\lambda_i \setminus Y_i)$. Pak g nepatří do žádné X_i, což je spor. Tedy máme nerovnost. $\boxplus$

Důsledek 9 (König a kofinály)**.** Buďte κ, λ kardinály takové, že $\kappa \geq 2, \lambda \geq \omega$. Pak

1. $\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$
2. $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$
3. $\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} > \lambda$

Důkaz. 1,2: Nechť $\langle \kappa_i : i < \lambda \rangle$ je posloupnost kardinálů, $\kappa_i < \kappa^\lambda$. Použijeme Königovu nerovnost pro $\lambda_i = \kappa^\lambda$. Pak $\sum_{i<\lambda} \kappa_i \overset{\text{K. n.}}{<} \prod_{i<\lambda} \kappa^\lambda = \kappa^{\lambda \cdot \lambda} = \kappa^\lambda$, tedy $\{\kappa_i : i < \lambda\}$ není kofinální vzhledem k κ^λ.

3: buď $\{x_i : i < \mathrm{cf}(\lambda)\}$ množina kofinální vzhledem k λ. Pak $\kappa_i = |x_i| < \lambda$, použijeme Königovu nerovnost pro $\lambda_i = \lambda$. Pak $\lambda = |\bigcup_{i<\mathrm{cf}(\lambda)} x_i| = \sum \kappa_i < \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$. ⊞

Důsledek 10 (Důsledky pro $2^{\aleph_\alpha}$)**.** $\alpha \leq \beta \to \aleph_\alpha \leq \aleph_\beta (1), 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha(\text{Cantor})(2), \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha(3)$, speciálně $\mathrm{cf}(2^\omega) > \omega, 2^\omega \neq \aleph_\omega$.

Easton (1970): Pro regulární kardinály $\aleph_\alpha$ je bezesporné $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{G(\alpha)}$ pro $G(\kappa)$ ordinální funkci splňující (1),(2),(3).

Silver: GCH nemůže být poprvé porušena na singulárním kardinálu $\aleph_\alpha$, jehož kofinál je nespočetný.

Nekonečná kombinatorika

Definice 31 (Strom, větve, výšky)**.**

- Strom je uspořádaná množina $(T, \leq)$, která splňuje $\forall x \in T$: dolná množina určená x, tj, $(\leftarrow, x]$ je dobře uspořádaná dle $\leq$.
- Větev ve stromě je jeho maximální řetězec
- Výška $x \in T$ $H_t(x)$, příp. $H(x)$ je ordinální typ $(\leq, x)$
- $T_\alpha = \{x \in T : H_T(x) = \alpha\}$ je α-tá hladina T
- Výška T je nejmenší α, pro které je $T_\alpha = \emptyset$ (alternativně $H(T) = \sup\{H_T(x) + 1, x \in T\}$)
- Délka větve je ordinální typ jejího uspořádání
- Kofinální větev je větev, jejíž délka je $H(T)$.

Cvičení 13 (Každý řetězec ve stromě je dobře uspořádaná množina)**.** Každý řetězec ve stromě je dobře uspořádaná množina.

Důkaz. TODO ⊞

Věta 23 (König, (AC))**.** Každý strom výšky ω, jehož každá hladina je konečná, má kofinální větev.

Důkaz. $|T| = \omega$. Pro $x \in T : [x, \to)$ značíme podstrom začínající v x a $(x, \to)$ jsou „následníci“ prvku x. Pak $T = \bigcup_{x \in T_0} [x, \to)$. Jelikož každá hladina je konečná, i $|T_0| < \omega$. Z Dirichletova principu $\exists x_0 \in T_0 : [x_0, \to)$ je nekonečný podstrom a $(x_0, \to)$ je nekonečná podmnožina. Obecně pro $x_n \in T_n : (x_n, \to) = \bigcup_{y \in T_{n+1}, y > x} [y, \to)$. Je-li $(x_n, \to)$ nekonečná, pak $\exists y \in T_{n+1} : x < y$ takové, že $(y, \to)$ je nekonečná. Z axiomu výběru existuje $f : T \to T$, která „vybírá y“ t.ž. $x \in T_{n+1} : |(x, \to)| = \omega$, pak $f(x) \in T_{n+1}, x < f(x), |(f(x), \to)| = \omega$. Tranzitivní reukrzí můžeme sestrojit posloupnost $(X_n, n \in \omega) : X_{n+1} = f(X_n), X_n < X_{n+1}$. ⊞

Cvičení 14. Odvoďte Königovu větu z principu maximality.

Poznámka (König obecněji)**.** Aronszajn: existuje strom výšky ω_1, jehož každá hladina je spočetná a nemá kofinální větev.

Zobecnění: pokud $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ a každá hladina je konená, pak existuje kofinální větev. Navíc pokud $\mathrm{cf}(\kappa) > \nu$ a každá hladina má mohutnost $< \nu$, pak existuje kofinální větev.

Definice 32 (Částečný selektor, pokrytí, filtrované prodloužení)**.** Nechť $\langle A_i : i \in I \rangle$ je soubor konečných množin. Pak

- částečný selektor souboru $\langle A_i : i \in I\rangle$ je zobrazení $f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq I, \forall i \in \mathrm{Dom}(f) : f(i) \in A_i$.
- systém částečných selektorů S pokrývá konečné podmnožiny I, pokud pro každou konenou podmnožinu $u \subseteq I \exists f \in S : u \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.
- zobrazení $g \in \bigtimes_{i\in I} A_i$ je filtrované prodloužení systému S, pokud pro každou konečnou $u \subseteq I$ platí $\exists f \in S : f \restriction u = g \restriction u$.

Věta 24 (Princip kompaktnosti (AC))**.** Je-li $\langle A_i : i \in I\rangle$ soubor konečných množin, potom každý systém částečných selektorů pokrývající konečné podmnožiny I má filtrované prodloužení.

Důkaz. Pomocí Zornova lemmatu. Nechť A_i, S je systém částečných selektorů pokrývajících konečné podmnožiny množiny I. Je-li h částečný selektor, řekneme, že je kompatibilní s S, pokud pro každou konečnou $u \subseteq I \exists f \in S : u \subseteq \mathrm{Dom}(f) \wedge f \restriction u \cap \mathrm{Dom}(h) = h \restriction u$.

Pak jako P oznaíme množinu částečných selektorů kompatibilních s S, částečně uspořádaných inkluzí. $P \neq \emptyset$, jelikož $\emptyset \in P$ Každý řetězec $\{h_j : j \in J\}$ má horní mez: $\bigcup_{j\in J} h_j$ je zobrazení, částečný selektor a je kompatibilní s S: pro $u \in I$ konečnou, $u \cap (\bigcup_{j\in J} h_j)$ je částí definičního oboru nějakého h_j, a to je kompatibilní s S.

Z principu maximality má P maximální prvek, označíme jej h. Pak h je částečný selektor kompatibilní s S, zbývá jenom ukázat, že h ej totální.

Chci: $\mathrm{Dom}(h) = I$. Sporem: ať $\exists x \in I \setminus \mathrm{Dom}(h)$. Tedy h nelze rozšířit žádnou dvojicí (x, y), kdy $y \in A_x$. Definujeme $h_y := h \cup \{(x, y)\}$, tedy $\forall y \in A_x$ existuje „konečný svědek“ $u_y \subseteq I$ takový, že „h_y není kompatibilní s žádným částečným selektorem z S na $u_y \cup \{x\}$ definovaném na u_y“. Tedy $\neg(\exists f \in S) f \restriction (u_y \cap \mathrm{Dom}(h_y)) \cup \{x\} = h_y \restriction (u_y \cup \{x\})$.

Nechť $U = \bigcup_{y\in A_x} u_y$, U je konečná podmnožina I, $U \cup \{x\}$ je stále konečná podmnožina. Pak x je kompatibilní s S, tedy existuje $f \in S$ definované na $U \cup \{x\}$ kompatibilní s h. Můžeme zvolit $y = f(x)$, tedy f je kompatibilní s h_y, tedy dostáváme spor. Tedy h je totální, a jedné se o filtrované prodloužení S. ⊞

Důsledek 11 (Kompaktnost barvení)**.** Je-li $H = (V, E)$ hypergraf, kde V je libovolná množina, E je systém konečných podmnožin, $rin\mathbb{N}$. Jde-li každý konečný podhypergraf dobře r-obarvit, pak i celý (V, E) jde dobře r-obarvit.

Důkaz. Mějme $A_i = \{1, \ldots, r\}, i \in V = I$. Pak S je systém dobrých r-obarvení koneččných indukovaných podhypergrafů Z principu kompaktnosti existuje filtrované prodloužení S. Hrana $e \in E$ je obsažena v indukovaném hypergrafu $H[e]$, a tedy $\exists f \in S : f \restriction e = g \restriction e$, tedy se jedná o dobré r-obarvení. ⊞

Věta 25 (Nekonečná Hallova věta)**.** Soubor konečných množin $\langle A_i : i \in I\rangle$ má prostý selektor (SRR jinak), právě když každý konečný podsoubor má prostý selektor. (což nastává, právě když $\forall J \subseteq I(|J| < \omega)) \to |\bigcup_{j\in J} A_j| \geq |J|$.

Důkaz. TODO ⊞

Cvičení 15 (Hall s nekonečnými množinami)**.** Co když místo konečných množin máme nekonečné?

Důkaz. TODO - nejde ⊞

Cvičení 16 (O izomorfní kopii $\mathbb{Q}$)**.** Je-li $\mathbb{Q} = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ rozklad $\mathbb{Q}$ na koneně mnoho částí, tek aspoň jeden X_i obsahuje izomorfní kopii $\mathbb{Q}$ vzhledem k $\leq$.

Důkaz. TODO ⊞

Definice 33 (Homogenní množina pro rozklad/funkci)**.** Buď Q rozklad $[X]^n$. Pak množina $A \subseteq X$ je homogenní pro rozklad Q, pokud $\exists q \in Q : [A]^n \subseteq q$.

Buď f funkce definovaná na $[X]^n, A \subseteq X$ je homogenní pro f, pokud f je konstantní na $[A]^n$.

Definice 34 (Rozkladová šipka)**.** Buďte κ, λ, μ kardinály, $r \in \omega$. Pak symbol (zápis) $\kappa \to (\lambda)^r_\mu$ znamená: „pro každou množinu X mohutnosti κ a každé zobrazení $[X]^r \to \mu$ existuje $A \subseteq X$ mohutnosti λ homogenní pro f“.

Příklad 3 (Příklady rozkladové šipky)**.**

- $6 \to (3)^2_2$
- $R(k,k) \to (k)^2_2$
- Dirichlet pro regulární kardinál κ: je-li $\mu < \kappa$, pak $\kappa \to (\kappa)^1_\mu$
- Dirichlet pro singulární kardinál κ: je-li $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$, pak $\kappa \to (\kappa)^1_\mu$
- Konečná ramseyovka: $\forall n, r, c \exists N \in \omega : N \to (n)^r_c$
- Nekonečná ramseyovka: $\forall r, c : \omega \to (\omega)^r_c$

Věta 26 (Nekonečná Ramseyova věta)**.** $\forall r, c : \omega \to (\omega)^r_c$

Důkaz. TODO ⊞

Definice 35 (Velká množina)**.** Řekneme, že $S \subseteq \omega$ je velká, pokud $|S| > \min S$.

Věta 27 (Paris-Harringtonova)**.**

1. $\forall n, r, c \exists N \in \omega : \forall f : [N]^r \to c$ existuje velká $A \subseteq N$ homogenní pro f mohunosti aspoň n.
2. Předchozí bod nelze dokázat v Peanově aritmetice.

Důkaz. Jenom 1: sporem, nechť pro nějaká $n, r, c : \forall N \in \omega \exists$ obarvení $f : [N]^r \to c$ bez velké homogenní množiny velikosti aspoň n. Použijeme princip kompaktnosti na soubor $\langle A_i : i \in [\omega]^r \rangle : A_i = c = \{0, 1, \ldots, c-1\}$. Získáme obarvení $g : [\omega]^r \to x$ nez velké homogenní množiny velikost $\geq n$. Dle nekonečné Ramseyovy vět existuje nekonená homogenní množina $A \subseteq \omega$. Pak stačí vzít $\max(n, (\min A) + 1)$ nejmenších prvků A a máme spor. ⊞

Cvičení 17 (Důsledky Parise-Harringtona s AC)**.**

1. Každá nekonečná uspořádaná množina má nekonečný řetězec nebo nekonečný antiřetězec
2. Každá nekonečná lineárně uspořádaní množina má nekonečnou podmnožinu uspořádanou dle typu ω nebo ω^* (zrcadlový typ k typu ω).

Věta 28 (Sierpinski)**.** $2^\omega \not\to (\omega_1)^2_2$

Důkaz. Prvně ukážeme, že žádná podmnožina $\mathbb{R}$ není uspořádaní podle typu ω_1 ani ω_1^*. Sporem ať taková existuje: $\{x_\alpha : \alpha \subseteq \omega_1\} \subseteq \mathbb{R}$ je rostoucí posloupnost. Pak pro každé $\alpha < \omega_1$ existuje racionální čáslo $q_\alpha \in (x_\alpha, x_{\alpha+1})$ díky AC + hustotě $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$. Dostáváme prosté zobrazení $\omega_1 \to \mathbb{Q}$, což je spor, jelikož $\omega_1 \succ \mathbb{Q}$ a zároveň $\omega_1 \preceq \mathbb{Q}$.

Definujeme obarvení $[\mathbb{R}]^2$: z AC (WO) zvolíme dobré uspořádání $\prec$ na $\mathbb{R}$ a definujeme $f(\{x, y\}) = 0$ pokud $x < y \wedge x \prec y$ a $f(\{x, y\}) = 1$ pokud $x < y \wedge x \succ y$, (tj. 0 pokud se obě uspořádání shodují a 1 pokud se liší). Homogenní množina pro f je dobře uspořádaná podmnožina $(\mathbb{R}, <)$ typu α nebo $(\mathbb{R}, >)$ typu α^* a dle lemmatu $|\alpha| \leq \omega$. Tedy homogenní množiny jsou nejvýše spočetné. ⊞

Věta 29 (Zobecněná Sierpinského věta)**.** Pro každá nekonečný kardinál κ platí $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$.

Důkaz analogicky, lexikografické uspořádání na posloupnostech κ_2, nemá podmnožinu typu κ^+.

Věta 30 (Erdös, Rado)**.** Pro každý nekonečný kardinál κ platí $(2^\kappa)^2 \to (\kappa^+)^2_\kappa$. (Bez dk)

Lemma 19 (Nefunkční Ramsey (AC))**.** Pro každý nekonečný kardinál platí: $\kappa \not\to (\omega)^\omega_2$

Důkaz. Na spočetných podmnožiných definujeme ekvivalenci $X \sim Y \leftrightarrow X \triangle Y$ je konečný. Z AC na třídách $\sim$ existuje selektor $g : g([X]_\sim) \in [X]_\sim$. Definujeme $f : X \mapsto g([X]_\sim)$. Dále definujeme $Q_0 = \{X \in [\kappa]^\omega : |X \triangle f(X)|$ je sudé$\}$ a $Q_1 = \{X \in [\kappa]^\omega : |X \triangle f(X)|$ je liché$\}$. Pak $\{Q_0, Q_1\}$ je rozklad $[\kappa]^\omega$, který nemá spočetnou homogenní podmnožinu.

Je-li $A \subseteq \kappa$ spočetná nekonečná, pak pro $X \subseteq A$ spočetnou vezmu $x \in X, Y := X \setminus \{x\}$. Pak $X \sim Y$, tedy $f(X) = f(Y)$. Pak $X \triangle f(X), Y \triangle f(X)$ mají odlišnou paritu, tedy jsou svědci nehomogenity. ⊞

Věta 31 (Erdös, Dustvnik, Miller)**.** Pro každý nekonečný kardinál κ platí $\kappa \to (\kappa, \omega)^2_2$ (jedna barva velký κ, druhá velká ω). (Bez dk)

Cvičení 18. Pro κ nekonečný kardinál platí $2^\kappa \not\to (3)^2_\kappa$ (lze pokrýt pomocí κ bipartitních podgrafů).

Důkaz. TODO ⊞

Definice 36 (Slabě kompaktní kardinál)**.** Slabě kompaktní kardinál je nespočetný kardinál κ, pro který platí $\kappa \to (\kappa)^2_2$.

Cvičení 19. Slabě kompaktní kardinál je regulární a silně limitní.

Důkaz. TODO ⊞

Definice 37 (Ramseyův kardinál)**.** Ramseyův kardinál je $\kappa \in Cn$ takový, že $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$. ($\omega$ není Ramseyův, $f(A) = 0$ pokud $|A| \in A$ a 1 jinak).

Definice 38 (Divně obarvitelný graf)**.** $G = (\mathbb{R}, \{\{x, y\} \in \mathbb{R}^2 : x - y - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\})$-

Tvrzení 1 (G je v ZFC bipartitní)**.** V ZFC: $\chi(G) = 2$.

Důkaz. $S = \{q + n\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\}$ S je podgrupa $(\mathbb{R}, +)$ a navíc komponenta souvislost G – definujeme ekvivalenci $E : xEy \leftrightarrow x - y \in S$. Z AC: Y je výběrová množina tříd E. Pro $t \in \mathbb{R} : f(t) \in Y$ je reprezentant třídy $[t]_E(tEf(t))$.

Pak 2-obarvení je $c(t) = 0$ pro $t - f(t) = q + 2n\sqrt{2}$ a 1 pro $t - f(t) = q + (2n + 1)\sqrt{2}$. ⊞

Definice 39 ($\mathrm{AC}_{\aleph_0}$, LM)**.** ($\mathrm{AC}_{\aleph_0}$): Na každé spočetné množině existuje selektor.
(LM): Každá podmnožina $\mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná.

Věta 32 (Solovay)**.** ZF+$\mathrm{AC}_{\aleph_0}$+LM je konzistentní teorie.

Definice 40 (Lebesgueova míra (náznak))**.** $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je systém podmnožin obsahující všechny intervaly, uzavřený na spočetná sjednocení, doplňky – borelovské množiny a množiny míry 0. Pak $\lambda : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+_0$ je zobrazení splňující $\lambda([a, b]) = b - a$, pro $A_1, \ldots$ disjunktní: $\lambda(\bigcup A_n) = \sum \lambda(A_n)$ (σ-aditivita).

Platí: A měřitelná ($A \in \mathcal{E}$), pak $\lambda(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i|, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\}$. Důsledkem je, že λ je translačně invariantní (nezávisí na posunu).

Tvrzení 2 (G je v ZF+LM+$\mathrm{AC}_{\aleph_0}$ nespočetně barevný)**.** V ZF+$\mathrm{AC}_{\aleph_0}$+LM: $\chi(G) \geq \aleph_1$.

Důkaz. Je-li $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ rozklad $\mathbb{R}$ na spočetně mnoho podmnožin, pak existuje $i \in \omega : \lambda(A_i) > 0$ ze spočetné aditivity.

Pomocné tvrzení: Je-li $A \subseteq \mathbb{R} : \lambda(A) > 0$, pak není nezávislá v G. Z pokrytí otevřenými intervaly plyne, že existuje interval I takový, že $\lambda(A \cap I)/\lambda(I) > 9/10$. Volím $q \in Q$ takové, že $q - \sqrt{2} \in (0, \lambda(I)/10)$. Označíme $B = A + (q - \sqrt{2})$. Pak $\lambda(B \cap I) \geq \lambda(I) \cdot 8/10$, a tedy $\lambda(A \cap B \cap I) \geq \lambda(I) \cdot 7/10$. Tedy $\exists x \in A \cap B$, tedy $x \in A, x \in B$, tedy $x - (q - \sqrt{2}) \in A$. Tedy máme dva prvky A, jejichž vzdálenost je $q - \sqrt{2}$, resp. $\sqrt{2} - q$. Tedy $\{x, y\} \in E(G)$ a A není nezávislá v G.

Z toho už původní tvrzení přímo plyne, neboť tím pádem musí být rozklad nespočetný, tedy tříd musí být alespoň $\aleph_1$. ⊞

Definice 41 (Shodnost, přeskladatelnost)**.** $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ jsou shodné (značeno $A \cong B$), pokud lze B dostat z A pomocí posunutí a rotací (přímá shodnost).

$A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ jsou přeskladatelné (*equidecomposable*) pomocí n částí (značeno $A \overset{n}{\cong} B$), pokud existují rozklady $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n, B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ takové, že $\forall i \in [n] : A_i \cong B_i$.

Dále píšeme $A \overset{n}{\preceq} B$, pokud existuje $B' \subseteq B$ takový, že $A \overset{n}{\cong} B'$ (přeskládatelnost na podmnožinu).

Pozorování (O přeskladatelnosti)**.** Pro A, C disjunktní a B, D disjunktní: pak $A \overset{m}{\preceq} B, C \overset{n}{\preceq} D \to A \cup C \overset{m+n}{\preceq} B \cup D$, $A \overset{m}{\preceq} B, C \overset{n}{\preceq} D \to A \cup c \overset{n+m}{\preceq} B \cup D$.

$A \overset{n}{\cong} B \overset{m}{\cong} C \to A \overset{m \cdot n}{\cong} C$
$A \overset{n}{\preceq} B \overset{m}{\preceq} C \to A \overset{m \cdot n}{\preceq} C$

Tvrzení 3 (Zobecněná Cantorova-Bernsteinova věta)**.** $A \overset{n}{\preceq} B \overset{m}{\preceq} A \to A \overset{m+n}{\cong} B$

Důkaz. Ať máme φ zobrazení A do části B, ψ zobrazení B do části A. Pro $a \in A$ uvážíme posloupnost vzorů $\psi^{-1}(a), \varphi^{-1}(\psi^{-1}(a)), \ldots$ pokud existují. Ta může být konečná, nekonečná nebo prázdná, ale každopádně toto indukuje orientovaný (bipartitní) graf, pak můžeme délku cesty vzít jako počet vrcholů.

Definujeme si rozklady $A = A_l \cup A_0 \cup A_\infty, B = B_l \cup B_0 \cup B_\infty$ tak, že

- $A_l = \{a, : \text{posloupnost vzorů má sudou délku}\}$
- $A_0 = \{a, : \text{posloupnost vzorů má lichou délku}\}$
- $A_\infty = \{a, : \text{posloupnost vzorů je nekonečná}\}$
- $B_l = \{b, : \text{posloupnost vzorů má sudou délku}\}$
- $B_0 = \{b, : \text{posloupnost vzorů má lichou délku}\}$
- $B_\infty = \{b, : \text{posloupnost vzorů je nekonečná}\}$

Pak pro $A_1 = A_l \cup A_\infty, A_2 = A_0, B_1 = B_0 \cup B_\infty, B_2 = B_l$ můžeme zobrazit A_1 na B_1 podle φ a B_2 na A_2 pomocí ψ. Navíc už původně jsme měli rozseknutí na nejvýše n částí pro φ a m pro ψ, což zůstává. ⊞

Cvičení 20. Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je kruh. Pak $D \overset{n+2}{\cong} D \cup (n \text{ kopií intervalu } (0,1])$.

Důkaz. $D \overset{1}{\succeq} D \cup (n \text{ kopií intervalu } (0,1])$ triviálně, obráceně za pomoci $n+1$ částí. Uvažme množinu rotací o iracionální násobek π, třeba α. Pak vezmeme množinu všech prvků, které se touto rotací posunou, do každého se trefíme právě jednou, takže orotujeme n-krát vezmeme zbytek jako naše polouzavřené intervaly. ⊞

Tvrzení 4 (O spočetné množině na jednotkové sféře)**.** Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^3$ je jednotková sféra $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ a $D \subset S$ její spočetná podmnožina. Označme $D' = S \setminus D$. Pak $S \overset{2}{\cong} D'$.

Důkaz. Stačí ukázat, že existuje vhodná osa rotace. Mějme $x, y \in D$ a uvažme otočení x na y podle nějaké osy. Všechny osy, které ale tohle splňují náleží nadrovině, která je osou úsečky x, y, a tato nadrovina je tedy zakázaná. Dvojic x, y je spoetně mnoho, tedy je i spočetně mnoho zakázaných nadrovin, takže je spočetně mnoho hlavních kružnic na S, což je stále množina míry 0. a míra sféry je > 0, takže existuje osa disjunktní s D a rotace α kolem této osy takové, že $D, \alpha[D], \alpha^2[D], \ldots$ jsou všechny disjunktní.

Pak označíme $A = D \cup \alpha[D] \cup \alpha^2[D] \cup \ldots, B = S \setminus A$. Potom $A \cong \alpha(A), B \cong B$. Tedy $S = A \cup B \overset{2}{\cong} \alpha(A) \cup B = S \setminus D = S'$. ⊞

Věta 33 (Banachův–Tarského paradox)**.** Mějme $\overline{S}, \overline{S_1}$ disjunktní uzavřené jednotkové koule, Pak platí, že $\overline{S} \overset{10}{\cong} \overline{S} \cup \overline{S_1}$.

Důkaz. Klíčový fakt: existují dvě rotace α o 180 stupňů a β o 120 stupňu takové, že kromě $\alpha^2 = e, \beta^3 = e$ žádná jiná kombinace $\alpha\beta\alpha\beta\ldots$ není identita.

Mějme tedy pro tyto rotace α, β grupu rotací G jimi generovanou. Prvky této grupy jsou $e, \alpha\beta^{\varepsilon_1}\alpha\ldots, \beta^{\varepsilon_1}\alpha\beta^{\varepsilon_2}\ldots$, kde $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$. Každý prvek G je opět rotace podle nějaké osy. Označme D množinu průsečíků všech os rotací grupy G se sférou S – tato množina je spočetná. Navíc $\forall \delta \in G : \delta[D] = D$: máme-li $x \in D : \exists \gamma \in G : \gamma(x) = x$, pak:

- $\delta\gamma\delta^{-1}\delta(x) = \delta\gamma(x) = \delta(x) \to \subseteq$
- $\delta^{-1}\gamma\delta\delta^{-1}(x) = \delta^{-1}\gamma(x) = \delta^{-1}(x) \to \supseteq$.

Pak označíme $D' = S \setminus D$. Tato množina D' nemá žádné pevné body prvků $G \setminus \{e\}$. Pro $x \in D'$ vezmeme orbitu x $S_x = \{\gamma(x) : \gamma \in G\}$ - orbity tvoří rozklad D'.

Z axiomu výběru vezmeme T výběrovou množinu pro S_x. Tedy každý prvek D' lze jednoznačně vyjádřit jako $\gamma(t)$, kde $t \in T, \gamma \in G$. Rozložíme D' na A, B, C následovně:

- $A = \{\gamma(t) : t \in T, \gamma = e \vee \gamma = \alpha\beta^{\varepsilon_1}\}$

- $B = \{\gamma(t) : t \in T, \gamma = \beta\alpha\beta^{\varepsilon_1}\}$
- $C = \{\gamma(t) : t \in T, \gamma = \beta^2\alpha\beta^{\varepsilon_1}\}$

Pak $A \cup B \cup C = D'$, $A \cong B \cong C \cong A : \beta A = B, \beta B = C, \beta C = A$. Navíc $\alpha(B \cup C) = A \setminus \{e\} \subset A$. Tedy $B \cup C \overset{1}{\preceq} A$. Poté máme $A \cup B \cup C \overset{2}{\preceq} B \cup C \overset{1}{\preceq} A$, a tedy $A \cup B \cup C \overset{2}{\preceq} A$, analogicky pro B.

Takže dle předchozího tvrzení „o spočetné množině sféry“ máme $D \cup D' = S \overset{2}{\cong} D' \overset{2}{\preceq} A$, tedy $S \overset{4}{\preceq} A$. Navíc $S_1 \overset{4}{\preceq} B$ analogicky, a tedy $S \cup S_1 \overset{8}{\preceq} A \cup B$. Teď můžeme udělat totéž, jenom se se sférami, ale s úsečkami tvaru $(0, a]$ a podobně. Pak $(\overline{S} \setminus \{0\} \cup (\overline{S_1} \setminus \{0'\})) \overset{8}{\preceq} \overline{A} \cup \overline{B}$. Pak jenom $\{0\} \cong \{0\}$ a $\{0'\} \cong \{y\}$ pro nějaké $y \in \overline{S} \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$.

Tedy $\overline{S} \cup \overline{S_1} \overset{9}{\preceq} \overline{S}$ (0 můžeme přilepit k nějaké rotaci) a $\overline{S} \overset{1}{\preceq} \overline{S} \cup \overline{S_1}$, a tedy ze zobecněného Cantora–Bernsteina máme, že $\overline{S} \cup \overline{S_1} \overset{10}{\cong} \overline{S}$. ⊞

Cvičení 21. Dokažte, že existuje n takové, že malá koule je $\overset{n}{\cong}$ (libovolně) velké kouli.

Důkaz. „Zvětšení“ jednoduché. „Zmenšení“: prostě používáme Banacha-Tarského, dokud se nám nepodaří pokrýt celou kouli. ⊞

Seznam témat