Poznámky - pravděpodobnost a statistika
Petr Chmel, ZS 2018/19

Definice 1 (σ-algebra)**.** Nechť Ω je neprázdná množina. Pak $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ nazveme σ-algebrou, pokud splňuje

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$ (uzavřenost na doplňky)
- $A_1, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_I \in \mathcal{A}$ (σ-aditivita)

Definice 2 (Pravděpodobnost)**.** Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω. Pak $P : A \to [0,1]$ nazveme pravděpodobností (pravděpodobnostní mírou), pokud splňuje

- $P(\Omega) = 1$
- Jsou-li $A_1, \ldots \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, pak $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ-aditivita)

Definice 3 (Pravděpodobnostní prostor)**.** Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra na Ω, P je pravděpodobnost na $\mathcal{A}$. Pak trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazveme pravděpodobnostním prostorem.

Definice 4 (Klasický pravděpodobnostní prostor)**.** Klasický pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ taková, že Ω je konečná, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

Definice 5 (Diskrétní pravděpodobnostní prostor)**.** Diskrétní pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ taková, že Ω je konečná nebo spočetná, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, P definujeme pomocí zobrazení $p : \Omega \to [0,1]$ takového, že $\sum_{\omega \in \Omega} p(w) = 1 : P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$.

Definice 6 (Spojitý reálný pravděpodobnostní prostor)**.** Spojitý reálný pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ taková, že $\Omega = \mathbb{R}^k, k \geq 1$, $\mathcal{A}$ je σ-algebra a obsahuje všechny otevřené intervaly, $P(\{\omega\}) = 0 \forall \omega \in \Omega, P(A) = \int_A f(w) \mathrm{d}w$ pro nějakou f splňující $f \geq 0, \int_\Omega f(w) \mathrm{d}w = 1$.

Věta 1 (Vlastnosti P)**.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Pak

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$
3. $A \subseteq B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $A \subseteq B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Důkaz. 1. suma/integrál přes prázdnou množinu je nulová
2. $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^C)$
3. očividné
4. $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$
5. $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B), B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ ⊞

Věta 2 (Princip inkluze a exkluze)**.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Pak

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{I \in [n]} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i \in I} A_i)$$

Důkaz. Indukcí ⊞

Definice 7 (Podmíněná pravděpodobnost)**.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$. Pak pravděpodobností jevu A za podmínky jevu B definujeme $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Pozorování. $P(\cdot|B)$ je pravděpodobnost.

Důkaz. Součet. $\boxplus$

Věta 3 (O násobení pravděpodobnosti)**.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.
Pak $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot \ldots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$.

Důkaz. Indukcí, báze z definice. $\boxplus$

Věta 4 (O úplné pravděpodobnosti)**.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A \in \mathcal{A}, \{B_i\}$ je disjunktní rozklad Ω. Pak $P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$.

Důkaz. Víme, že $A \cap B_i$ jsou po dvou disjunktní množiny, tedy $\bigcup_i A \cap B_i = A \cap \bigcup_i B_i = A \cap \Omega = A$.
Tedy $P(A) = P(\bigcup_i A \cap B_i) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$ $\boxplus$

Věta 5 (Bayesova)**.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\{B_i\}$ je disjunktní rozklad Ω, $A \in \mathcal{A}$: $P(A) > 0$. Pak $P(B_i|A) = \dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$

Důkaz. $P(B_i|A) = \dfrac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$ $\boxplus$

Věta 6 (Bonferroniho nerovnost)**.** Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou náhodné jevy. Pak $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n (1 - P(A_i))$.

Důkaz. $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = 1 - P((\cap_{i=1}^n A_i)^C) = 1 - P(\cup_{i=1}^n A_i^C) \geq 1 - \sum\limits_{i=1}^n P(A_i^C) = 1 - \sum\limits_{i=1}^n (1 - P(A_i))$. $\boxplus$

Definice 8 (Stochasticky nezávislé jevy)**.** Nechť A, B jsou náhodné jevy. Nazveme je (stochasticky) nezávislými, pokud $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definice 9 (Vzájemná nezávislost)**.** Nechť $A_1 \ldots, A_n$ jsou náhodné jevy. Tyto jsou vzájemně nezávislé, pokud $\forall I \subseteq [n] : P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Definice 10 (Náhodná veličina)**.** Zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall a \in \mathbb{R} X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ nazveme náhodnou veličinou.

Definice 11 (Rozdělení náhodné veličiny)**.** Nechť X je reálná náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak existuje jednoznačně daná pravděpodobnost P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že $P_X(B) = P[x \in B]$, pokud $B \in \mathcal{B}$. Pak P_X nazveme rozdělením náhodné veličiny X.

Definice 12 (Distribuční funkce náhodné veličiny)**.** Nechť X je náhodná veličina a P_X její rozdělení. Pak funkce $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ taková, že $F_X(a) = P_X(-\infty, a]$ se nazývá distribuční funkcí X.

Věta 7 (Vlastnosti distribuční funkce)**.** Nechť X je náhodná veličina, F_X její distribuční funkce. Pak

1. F_X je neklesající
2. $\lim_{a \to \infty} F_X(a) = 1$,$\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$
3. F_X je zprava spojitá

Důkaz. 1. $F_X(b) = P[X \leq b] = P[X \leq a] + P[X \in (a, b)] \geq P[X \leq a] = F_X(a)$
2. $F_X(n) = P[X \leq n] = P[\sup_{i=-\infty}^n X \in (i-1, k]] = \sum\limits_{i=-\infty}^{n} P[X \in (i-1, i]] \xrightarrow{n \to \infty} P[x \in \mathbb{R}]$
3. $F_X(a_n) = P[X \leq a_n] \to P[X \leq a]$.
$P[X \leq a_n] - P[X \leq a] = P[x \in (a, a_n]]$. Platí $A_n > A_{n+1} \wedge \cap_{n=1}^\infty = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0 \Rightarrow \cap_{n=1}^\infty (a, a_n] = \emptyset$. $\boxplus$

Věta 8 (Kanonická konstrukce)**.** Nechť $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ splňuje podmínky 1,2,3 z předchozí věty. Pak existuje pravděpodobnostní prostor a náhodná veličina X tak, že F je distribuční funkcí X.

Důkaz. Zvolíme $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}$ (Borelova σ-algebra).
$P(-\infty, a] = P(a), P$ lze jednoznačně dodefinovat na $\mathcal{B}$ tak, aby rovnost platila - z teorie míry.
Zbývá $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : X(u) = u \Rightarrow X = Id$.
X má za distribuce funkci $F : P[X \leq a] = P\{u : X(u) \leq a\} = P\{u : u \leq a\} = P(-\infty, a] = F(a)$. ⊞

Definice 13 (Náhodný vektor)**.** Zobrazení $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}^d, d \geq 2$ takové, že $\{\omega : X_1(\omega) \leq a_1, \ldots, X_d(\omega) \leq a_d\} \in \mathcal{A}, \mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ nazveme náhodným vektorem.

Definice 14 (Rozdělení a distribuční funkce náhodného vektoru)**.** Nechť $\mathcal{X}$ je d-rozměrný náhodný vektor. Pravděpodobnost $P_{\mathcal{X}}$ definovaná jednoznačně na všech otevřených i uzavřených množinách v $\mathbb{R}^d$ (a jejich spočetných $\cap, \cup$) taková, že $P_{\mathcal{X}}(\pi_{i=1}^{d}(-\infty, a_i]) = P[\mathcal{X} \leq a] \forall a = (a_1, \ldots, a_d)$ se nazývá rozdělení náhodného vektoru $\mathcal{X}$.
Distribuční funkce náhodné vektoru $\mathcal{X}$ je funkce $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R}^d \to [0,1] : F_{\mathcal{X}}(a) = P[\mathcal{X} \leq a]$

Věta 9 (Vlastnosti distribuční funkce)**.** Nechť $\mathcal{X}$ je náhodný vektor a $F_{\mathcal{X}}$ jeho distribuční funkce.
Pak

1. $F_{\mathcal{X}}$ je zprava spojitá a neklesající v každé své složce.
2. $\forall i \in [d] : \lim_{a_i = -\infty} F_{\mathcal{X}}(a) = 0$
3. $\lim_{a_i \to +\infty, \forall i \in [d]} F_{\mathcal{X}}(a) = 1$
4. $\forall a > b$ platí $\sum_{k=0}^{d} f(-1)^k \sum_{c\in} \delta k(a,b) F_{\mathcal{X}}(x) \geq 0$

Definice 15 (Marginální rozdělení a distribuční funkce)**.** Buď X náhodný vektor, F_X sdružená distribuční funkce $X = (Y_1, \ldots, Y_n)$, kde Y_i je náhodná veličina a platí $F_{Y_i}(a) = \lim\limits_{a_j \to +\infty \forall j \neq i} F_X(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_d)$.
F_{Y_i} nazýváme marginální distribuční funkcí.
Podobně P_X je sdružené rozdělení a P_{Y_i} je marginální rozdělení.

Věta 10 (O marginálním rozdělení)**.** Nechť $\mathcal{X}$ je náhodný vektor a $P_{\mathcal{X}}$ jeho rozdělení. Pak všechna marginální rozdělení jsou jednoznačně určena.

Důkaz. Plyne přímo z definice sdruženého a marginálního rozdělení. ⊞

Definice 16 (Nezávislost náhodných veličin či vektorů)**.** Buďte $X_1, \ldots, X_n$ náhodné veličiny a $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ jejich distribuční funkce. Pokus pro náhodný vektor $Y = (X_1, \ldots, X_n)$ a jeho distribuční funkci F_Y platí $F_Y(y) = \prod\limits_{i=1}^{n} F_{X_i}(y_i) \forall y \in \mathbb{R}^n$, řekneme, že $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Věta 11 (Nezávislé náhodné veličiny a jejich složené rozdělení)**.** Nechť $X_1, \ldots, X_N$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak po rozdělení náhodného vektoru $x = (x_1, \ldots, x_n)$ platí $P_x(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{x_i}(A_i)$ $\forall A_1 \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ otevřené, uzavřené intervaly a jejich spočetná sjednocení a průniky.

Důkaz. Plyne z charakterizace rozdělení. ⊞

Věta 12 (Ekvivalentní podmínky nezávislosti)**.** Buďte $X_1, \ldots, X_n$ diskrétní náhodné veličiny. Pak $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, právě když $P[X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_n] = \prod\limits_{i=1}^{n} P[X_i = s_I] \forall (s_1, \ldots, s_n)$
Buďte $X_1, \ldots, X_n$ spojité náhodné veličiny. Pak $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé, právě když $f_X(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \forall (x_1, \ldots, x_n)$

Definice 17 (Náhodný výběr)**.** Nechť náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé a mají stejné rozdělení (dále značíme iid). Ty pak nazveme náhodným výběrem o rozsahu n.

Definice 18 (Empirická distribuční funkce)**.** Nechť $X_1 \dots, X_n$ je náhodný výběr. Pak náhodné veličiny $\hat{F_n}(x) := \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} I[X_i \leq x])$ nazveme empirickou distribuční funkcí.

Věta 13 (O rozdělení empirické distribuční funkce)**.** Buď $X_1, \dots X_n$ náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí F_X. Pak $P[\hat{F_n}(x = \dfrac{k}{n}] = \binom{n}{k}(F_X(x))^k(1 - F_X(x))^{n-k}$

Definice 19 (Střední hodnota)**.** Buď $X : \Omega \to \mathbb{R}$ náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak definujeme střední hodnotu jako $EX = \int_\Omega X(\omega)\ \mathrm{d}P(\omega)$, pokud integrál existuje.

Věta 14 (Střední hodnota pro diskrétní náhodnou veličinu)**.** Buď X diskrétní náhodná veličina s hustotou $p(s) = P[X = s], s \in S, S$ nejvýše spočetná, $P[X \in S] = 1$.
Pak $EX = \sum_{s \in S} s \cdot p(s)$, má-li pravá strana smysl.

Důkaz. $\bigcup\limits_{s \in S} [X = s] = \Omega$.
Pro $s \neq t : [X = s] \cap [X = t] = \emptyset$.
Mám disjunktní rozklad Ω. Z teorie integrálu: $\int_\Omega X(\omega)\ \mathrm{d}P(\omega) = \int_{\cup_{s \in S}[X=s]} X(\omega)\ \mathrm{d}P(\omega) = \sum\limits_{s \in S} \int_{[X=s]} X(\omega)\ \mathrm{d}P(\omega) = \sum\limits_{s \in S} \int_{[X=s]} s\ \mathrm{d}P(\omega) = \sum\limits_{s \in S} s \int_{[X=s]}\ \mathrm{d}P(\omega) = \sum\limits_{s \in S} sP[X = s]$, mají-li výrazy smysl. ⊞

Věta 15 (Střední hodnota spojité náhodné veličiny)**.** Buď X spojitá náhodná veličina s hustotou f_x. Pak $EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\ \mathrm{d}x$, pokud integrál existuje.

Definice 20 (Obecné momenty náhodné veličiny)**.** Buď X náhodná veličina, $X : \Omega \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ náhodná funkce. Pak $Eg(X) = \int_\Omega g(X(\omega))\ \mathrm{d}P(\omega)$ má-li pravá strana smysl.

Věta 16 (Výpočetní věta $E(g(X))$)**.** Buď X náhodná veličina a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak

1. X diskrétní: $Eg(X) = \sum_{s \in S} g(s)P[X = s]$, má-li pravá strana smysl
2. X spojitá: $Eg(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\ \mathrm{d}x$, má-li pravá strana smysl

Věta 17 (Linearita střední hodnoty)**.** Buď X náhodná veličina s existující střední hodnotou. Pak $\forall a, b \in \mathbb{R} : E(a + bX) = a + bEX$.

Důkaz pro diskrétní náhodné veličiny. $E(a + bX) = \sum\limits_{s \in S}(a + bs)P[X = s] = \sum\limits_{s \in S} aP[X = s] + \sum\limits_{s \in S} bsP[X = s] = a + bEX$ ⊞

Věta 18 (Jensenova nerovnost)**.** Buď X náhodná veličina s konečnou střední hodnotou, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexní taková, že $E\varphi(X)$ je konečná. Pak $E\varphi(X) \geq \varphi(EX)$.

Důkaz. Pro konvexní funkci platí $\forall a \in \mathbb{R} \exists \lambda$ konstanta taková, že $\varphi(x) \geq \varphi(a) + \lambda(x - a)$.
$a = EX : \forall x : \varphi(x) \geq \varphi(EX) + \lambda(x - EX)$, také tedy $\varphi(X) \geq \varphi(EX) + \lambda(X - EX)$, tedy $E\varphi(X) \geq E\varphi(EX) + \lambda E(X - EX) = \varphi(EX)$ ⊞

Definice 21 (Některé významné momenty náhodných veličin)**.** Střední hodnota X je EX
První absolutní moment X je $E|X|$
Druhý moment X je EX^2
Variance, rozptyl nebo střední čtvercová odchylka je $\mathrm{var}\ X = E(X - EX)^2$
Šikmost rozdělení X je $\dfrac{E(X - EX)^3}{(\mathrm{var}\ X)^{\frac{3}{2}}}$

Věta 19 (Efektivní výpočet rozptylu)**.** Buď X náhodná veličina a $EX^2 < \infty$. Pak $\mathrm{var}\ X = EX^2 - (EX)^2 = EX(X - 1) + EX - (EX)^2$ a platí $\forall a, b \in \mathbb{R} : \mathrm{var}(a + bX) = b^2 \mathrm{var}\ X$

Důkaz. $E(X-EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = EX^2 - E(2XEX) + E((EX)^2) = EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$
$\mathrm{var}(a+bX) = E(a+bX-E(a+bX))^2 = (a+bX-a-bEX)^2 = Eb^2(X-EX)^2$ ⊞

Definice 22 (Momenty náhodného vektoru)**.** Buď $X = (X_1, \dots, X_d)$ náhodný vektor.

1. $EX = (EX_1, \dots, EX_d)$, pokud všechny EX_i existují
2. Nechť $g\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Definujeme $Eg(x) = \int_\Omega g(X(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega)$, má-li pravá strana smysl.

Věta 20 (Výpočet $E(g(\mathcal{X}))$)**.** Buď X náhodný vektor a $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ měřitelná.
Je-li X spojitý náhodný vektor (se sdruženou hustotou f_X), pak $Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\dots,x_d)\cdot f_x(x_1,\dots,x_D)\,\mathrm{d}x_d\,\mathrm{d}x_{d-1}\dots\,\mathrm{d}x_1$, má-li pravá strana smysl.
Je-li X diskrétní náhodný vektor s hodnotami v $\mathbb{N}_0^d$, pak $Eg(X) = \sum_{n_+=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\dots\sum_{n_d=0}^{\infty} g(x_1,\dots,x_d)\cdot P[X_1 = n_1,\dots,X_d = n_d]$, má-li pravá strana smysl.

Věta 21 (Střední hodnota součtu náhodných veličin)**.** Buď $X = (X_1,\dots,X_d)$ náhodný vektor a buďte $a \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, i \in [d]$. Pak $E(a + \sum\limits_{i=1}^{d} b_i X_i) = a + \sum\limits_{i=1}^{d} b_i EX_i$ má-li pravá strana smysl.

Důkaz pro diskrétní náhodné veličiny. Indukcí: $g(X_1,X_2) = a + b_1X_1 + b_2X_2$
$E(g(X_1,X_2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}(a+b_1n+b_2m)P[X_1 = n, X_2 = n] = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} aP[X_1 = n, X_2 = m] + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_1nP[X_1 = n, X_2 = m] + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_2mP[X_1 = n, X_2 = m]a + b_1EX_1 + b_2EX_2.$ ⊞

Definice 23 (Kovariance)**.** Buď $X = (X_1, X_2)$ náhodný vektor s konečnými rozptyly složek. Pak kovariance dvou složek náhodného vektoru je $\mathrm{cov}(X_1,X_2) = E(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2) = EX_1X_2 - EX_1\cdot EX_2$

Definice 24 (Korelace)**.** Buď $X = (X_1, X_2)$ náhodný vektor s konečnými rozptyly složek. Pak korelace dvou složek náhodného vektoru je $\mathrm{corr}(X_1,X_2) = \dfrac{\mathrm{cor}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{var}\ X_1\cdot \mathrm{var}\ X_2}}$

Věta 22 (O nezávislosti a korelaci)**.** Buď $X = (X_1, X_2)$ náhodný vektor s konečnými rozptyly složek. Pak $\mathrm{cov}(X_1,X_2) = \mathrm{corr}(X_1,X_2) = 0$, pokud jsou X_1 a X_2 nezávislé náhodné veličiny.
Pozor: obrácená implikace obecně neplatí.

Pro spojitý náhodný vektor. $EX_1X_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f_X(x_1,x_2)dx_2dx_1 \overset{\text{nezáv.}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)dx_2dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1f_{X_1}(x_1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2f_{X_2}(x_2)dx_2dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1f_{X_1}(x_1)EX_2dx_1 = EX_2\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1f_{X_1}(x_1)dx_1 = EX_2EX_1 \Rightarrow cov(X_1,X_2) = EX_1X_2 - EX_1EX_2 = 0$ pro X_1, X_2 nezávislé. ⊞

Věta 23 (Rozptyl součtu náhodných veličin)**.** Buďte $X_1,\dots,X_d$ náhodné veličiny s konečnými rozptyly, $a \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, i \in [d]$. Pak $\mathrm{var}(a + \sum\limits_{i=1}^{d} b_iX_i) = \sum\limits_{i=1}^{d} b_i^2\mathrm{var}\ X_i + \sum\sum_{i\neq j} b_ib_j\cdot\mathrm{cor}(X_i,X_j)$.

Důkaz. Zmizení a je jasné.
$\mathrm{var}(\sum\limits_{i=1}^{d} b_iX_i) \overset{\text{def}}{=} E(\sum\limits_{i=1}^{d} b_iX_i - E(\sum\limits_{i=1}^{d} b_iX_i))^2 = E(\sum\limits_{i=1}^{d} b_i(X_i - EX_i))^2 = E(\sum\limits_{i=1}^{d} b_i^2(X_i - EX_i)^2 + \sum\sum\limits_{i\neq j} b_ib_j(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)) = \sum\limits_{i=1}^{d} b_i^2E(X_i - EX_i)^2 + \sum\sum\limits_{i\neq j} b_ib_jE(X_i - EX_i)E(X_j - EX_j).$ ⊞

Definice 25 (Varianční a korelační matice)**.** Buď $X = (X_1,\dots,X_d)$ náhodný vektor se složkami s kladnými konečnými rozptyly. Pak $\mathrm{Var}(X) = (\mathrm{cov}(X_i,X_j))_{i=1,j=1}^{d,d}$ a $\mathrm{Corr}(X) = (\mathrm{corr}(X_i,X_j))_{i=1,j=1}^{d,d}$ jsou varianční a korelační matice X.

Věta 24 (Vlastnosti korelace a kovariance)**.** Buď $X = (X_1,\dots,X_d)$ náhodný vektor se složkami s kladnými konečnými rozptyly. Pak

1. $|\text{corr}(X_i, X_j)| \leq 1$
2. $|\text{corr}(X_i, X_j)| = 1 \Leftrightarrow \exists a \neq 0, b \in \mathbb{R} : P[X_i = aX_j + b] = 1$
3. $\text{cov}(a + bX, c + dY) = bd\text{cov}(X, Y)$
4. $\text{corr}(a + bX, c + dY) = \text{sgn}(bd)\text{corr}(X, Y)$
5. $\text{Var}(X), \text{Corr(X)}$ jsou symetrické a pozitivně semidefinitní

Důkaz. 1 - Cauchy-Schwarz
2 - zjevně
3, 4 - z definice
5 - $u^T \text{Var}X u = \sum\limits_{i=1}^{d} u_i^2 \text{var}X_i + \sum\sum\limits_{i \neq j} u_i u_j cov(X_i, X_j) = \text{var}(\sum\limits_{i=1}^{d} u_i X_i) \geq 0.$ ⊞

Definice 26 (Konvergence v pravděpodobnosti)**.** Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor, X_n posloupnost náhodných vektorů nebo veličin stejné dimenze na Ω. O X_n řekneme, že konverguje k X v pravděpodobnosti, pokud $\forall \varepsilon > 0 : P[|X_n - X| > \varepsilon] \overset{n \to \infty}{\to} 0$.

Definice 27 (Konvergence v rozdělení)**.** Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor, X_n posloupnost náhodných vektorů nebo veličin stejné dimenze na Ω. O X_n řekneme, že konverguje k X v rozdělení (distribuci), pokud $F_{X_n}(x) = P[X_n \leq x] \overset{n \to \infty}{\to} P[X \leq x] = F_X(x)$ pro všechna x, kde F_X je spojitá.

Definice 28 (Bodový odhad)**.** Buď $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí F_X. Funkci $g_n : \mathbb{R}^n \to \Theta$, jejíž předpis nezávisí na rozdělená F_X ani jeho parametrech nazveme bodovým odhadem.

Definice 29 (Nestrannost odhadu)**.** Buď $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí F_X a θ odhadovaný parametr. Bodový odhad $\hat{\theta_n}$ nazveme nestranným, pokud $\forall \theta \in \Theta : E\hat{\theta_n} = \theta$, je-li θ skutečnou hodnotou parametru.

Definice 30 (Konzistence odhadu)**.** Buď $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí F_X a θ odhadovaný parametr. Bodový odhad $\hat{\theta_n}$ nazveme konzistentním, pokud $\forall \theta \in \Theta : \hat{\theta_n} \overset{P}{\to} \theta$, je-li θ skutečnou hodnotou parametru.

Definice 31 (Výběrový průměr a rozptyl)**.** Buď $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr. Výběrovým průměrem nazveme $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ a výběrovým rozptylem nazveme $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_i})^2$

Věta 25 (Nestrannost výběrového průměru, rozptylu a EDF)**.** Výběrový průměr, výběrový rozptyl a empirická distribuční funkce jsou nestranné odhady, mají-li tyto odhady smysl.

Definice 32 (Výběrové momenty)**.** Buď $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr. Pak r-tý výběrový moment je $\widehat{EX^r} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^r$

Věta 26 (Nestrannost výběrových momentů)**.** Výběrový moment je nestranný odhad.

Věta 27 (Markovova nerovnost I)**.** Buď X nezáporná náhodná veličina. Pak $\forall \varepsilon > 0$ platí $P[X \geq \varepsilon] \leq \frac{EX}{\varepsilon}$

Důkaz. $P[X \geq \varepsilon] = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} f_X(x) \, \mathrm{d}x \leq \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\varepsilon} f_X(x) \, \mathrm{d}x \leq \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{\varepsilon} f_X(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{0}^{\infty} x F_x(x) \, \mathrm{d}x = \frac{EX}{\varepsilon}.$ ⊞

Věta 28 (Markovova nerovnost II)**.** Buď X nezáporná náhodná veličina. Pak $\forall \varepsilon > 0$ platí $\forall r > 0 : P[X \geq \varepsilon] \leq \frac{EX^r}{\varepsilon^r}$

Důkaz. Jako u I, jen $\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^r \geq 1$. ⊞

Věta 29 (Čebyševova nerovnost)**.** Buď X náhodná veličina s konečnou střední hodnotou. Pak $\forall \varepsilon > 0 : P[||X - EX| \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{var } X}{\varepsilon^2}$

Důkaz. Použitím Markovovy nerovnosti II s $k = 2, X = |X - EX|$. ⊞

Věta 30 (Kolmogorovova nerovnost)**.** Nuďte $X_1, \dots, X_n$ nezávislí náhodné veličiny s konečnou střední hodnotou. Pak $\forall \varepsilon > 0 : P[\max\limits_{k \in [n]} |\sum_{i=1}^{k}(X_i - EX_i)| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{var } X_i}{\varepsilon^2}$

Věta 31 ((Slabý) Zákon velkých čísel)**.** Buďte $X_+, \dots, X_n$ iid takové, že $EX_1 = \mu, \text{var } X_1 = \sigma^2 < \infty$. Pak $\forall \varepsilon > 0 : \overline{X_n} \xrightarrow{P}$ pro $n \to \infty$.

Důkaz. $P[|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)| \geq \varepsilon] \overset{\text{Čebyšev}}{\leq} \dfrac{1}{\varepsilon^2}\text{var}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{nezáv.}}{=} \dfrac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \text{var} X_i = \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$ ⊞

Tvrzení 1 (O spojitém zobrazení)**.** Buď $X_1, X_2, \dots$ posloupnost náhodných veličin taková, že $X_n \xrightarrow{P} a$. Buď φ spojitá funkce. Pak $\varphi(X_i) \xrightarrow{P} \varphi(a)$.

Věta 32 (Centrální limitní věta)**.** Buďte $X_1, X_2, \dots$ iid náhodné veličiny takové, že $0 < \text{var } X_1 = \sigma^2 < \infty, EX_1 = \mu$.

Pak $\forall x \in \mathbb{R} : P\left[\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right] \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x)$, kde Φ je distribuční funkce normálního rozdělení s parametry $0, 1$, tedy $N(0, 1)$.

Věta 33 (Delta věta)**.** Buď $Y_1, Y_2, \dots$ posloupnost náhodných veličin taková, že $\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ a buď g diferencovatelná.
Pak $\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, (g'(\mu))^2\sigma^2)$

Definice 33 (Intervalový odhad)**.** Buď $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z P_θ, θ neznámý parametr a $\Theta \subset \mathbb{R}$. Intervalovým odhadem nazveme dvojici funkcí $L(X_1, \dots, X_n) \to \mathbb{R}, U(X_1, \dots, X_n) \to \mathbb{R}$, jejichž předpis nezávisí na θ a které splňují $P[L(X_1, \dots, X_n) \leq \theta \leq U(X_1, \dots, X_N)] \geq 1 - \alpha$ pro každé θ, je-li θ skutečnou hodnotou parametru.

Věta 34 (Sluckého věta)**.** Buď $X_n \xrightarrow{d} N(0, 1), U_n \xrightarrow{P} a, Z_n \xrightarrow{P} s > 0$.
Pak $Z_N X_n + U_n \xrightarrow{d} N(a, s^2)$.

Důkaz. Náznak pro $U_n = a = 0$.
$P[Z_n Y_n \leq x] = P[Z_n Y_n \leq c \wedge |Z_n - s| < \varepsilon] + P[Z_n Y_n \leq x \wedge |Z_n - s| \geq \varepsilon]$. Druhý sčítanec jde s rostoucím n k nule. ⊞

Definice 34 (Množinový limsup a liminf)**.** Buď A_n množiny (náhodné jevy). Definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i,$$

Věta 35 (Borelův-Cantelliův 0-1 zákon)**.** Buď $A_1, A_2, \dots$ nekonečný soubor množin z $\mathcal{A}$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor.
Pak

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P[\limsup\limits_{n\to\infty} A_n] = 0$ (Cantelli)
- Jsou-li $A_1, A_2, \dots$ nezávislé, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P[\limsup\limits_{n\to\infty} A_n] = 0$ (Borel)

Důkaz. 1: $P[\limsup A_n] = P[\cap \cup A_k] = \lim\limits_{n\to\infty} P[\cup A_k] \leq \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$ ⊞

Definice 35 (Momentová vytvořující funkce)**.** Buď X náhodná veličina.
Pak $\psi(t) := Ee^{tX}$ je momentová vytvořující funkce X a je definována tam, kde $Ee^{tX} < \infty$.

Věta 36 (Chernoffovy meze)**.** Buď X náhodná veličina a $\psi(t)$ její momentová vytvořující funkce.
Pak $P[X \geq a] \leq \inf\limits_{t>0} \frac{\psi(t)}{e^{at}}$, $P[X \leq a] \leq \inf\limits_{t<0} \frac{\psi(t)}{e^{at}}$

Důkaz. $P[X \geq a] \overset{t \geq 0}{=} P[e^{tX} \geq e^{ta}] \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{Ee^{tx}}{e^{ta}} = \frac{\psi(t)}{e^{at}}$
$P[X \leq a] \overset{t \leq 0}{=} P[e^{tX} \geq e^{ta}] \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{Ee^{tx}}{e^{ta}} = \frac{\psi(t)}{e^{at}}$ ⊞

Definice 36 (Poissonovské pokusy)**.** Nezávislé náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots,$ takové, že $P[X_i = 1] = p_i = 1 - P[X_i = 0]$ se nazývají poissonovské pokusy.

Věta 37 (Horní Chernoffovy meze pro poissonovské pokusy)**.** Buďte $X_1, X_2, \ldots$ poissonovské pokusy.
$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \mu_s = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$
Pak pro $\delta > 0 : P[S_n \geq (1+\delta)\mu_s] \leq (\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}})^{\mu_s}$
Pro $0 < \delta \leq 1 : P[S_n \geq (1+\delta)\mu_s] \leq e^{\mu_s \delta^2/3}$
Pro $6\mu_s < \delta : P[S_n > \delta] \leq 2^{-\delta}$

Důkaz. Pouze 1: $P[S_n \geq (1+\delta)\mu_s] \leq \dfrac{\psi_{S_n}(t)}{e^{t(1+\delta)\mu_s}}$.
Z nezávislosti máme $\psi_{S_n} = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t)$ a $\psi_{X_i}(t) = Ee^{tX_i} = p_i e^t + (1-p_i) = 1 + p_i(e^t - 1)$.
Dále $\prod_{i=1}^n (1 + p_i(e^t-1)) = \exp(\sum_{i=1}^n \log(1 + p_i(e^t-1))) \leq \exp((e^t-1)\sum\limits_{i=1}^{n} p_i) = \exp((e^t-1)\mu_s)$.
Dosadíme do vzorce: $\dfrac{\prod_{i=1}^n (1 + p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu_s}} \leq \dfrac{\exp((e^t-1)\mu_s)}{\exp(t(1+\delta)\mu_s)} = \exp(\mu_s(e^t - 1 - t(1+\delta))$
Tedy $P[S_n \geq (1+\delta)\mu_s] \leq \dfrac{\prod_{i=1}^n (1 + p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu_s}} = \exp(\mu_s(\delta - \log(1+\delta)\cdot(1+\delta)) = (\frac{d^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}})^{\mu_s}$ pro $t = \log(1+\delta)$. ⊞

Věta 38 (Dolní Chernoffovy meze pro poissonovské pokusy)**.** Buďte $X_1, X_2, \ldots$ poissonovské pokusy.
$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \mu_s = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$
Pro $0 < \delta < 1 : P[S_n \leq (1-\delta)\mu_s] \leq (\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}})^{\mu_s}$
Pro $0 < \delta \leq 1 : P[S_n \leq (1-\delta)\mu_s] \leq e^{-\mu_s \delta^2/2}$

Věta 39 (Rozdělení součtu a součinu náhodných veličin)**.** Buďte X, Y diskrétní náhodné veličiny. Pak

1. $Z = X + Y$ je také diskrétní náhodná veličina a platí $P[Z = v] = \sum_u [PX = u, Y = v - u]$.
2. Pokud jsou X, Y kladné (tedy $P[X > 0] = P[Y > 0] = 1$), pak $V = XY$ je také kladná diskrétní náhodná veličina a $P[V = z] = \sum_u P[X = u, Y = \frac{z}{u}]$. (Pro obecné d.n.v. je třeba dát pozor na $ab = -(a)(-b), 0a = 0b = 0$)

Důkaz. Dle věty o úplně pravděpodobnosti: $P[Z = v] = \sum_u P[Z = v, X = u] = \sum_u P[X = u, X + Y = v] = \sum_u P[X = u, Y = v - u]$.
Druhý bod analogicky. ⊞

Věta 40 (Konvoluce)**.** Buď (X, Y) spojitý náhodný vektor s hustotou $f_{(X,Y)}$. Pak $Z = X + Y$ je spojitá náhodná veličina a platí $f_Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, t - x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Chceme najít $P[Z \leq z] = P[X + Y \leq z] = P[(X, Y) \in H]$, kde H je polorovina rozdělená přímkou $z = x + y$. To se rovná

$$\int\int_H f_{(X,Y)}(u, v)\ \mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-u} f_{(X,Y)}(u, v)\ \mathrm{d}v\mathrm{d}u = F_Z(z)$$

Toto potřebujeme zderivovat podle z:

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-u} f_{(X,Y)}(u, v)\ \mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{z-u} f_{(X,Y)}(u, v)\ \mathrm{d}v\mathrm{d}u\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u, z-u)\ \mathrm{d}u$$

⊞

Věta 41 (Hustota podílu a součinu)**.** Buď (X, Y) spojitý náhodný vektor s hustotou $f_{(X,Y)}$ a nechť $P[Y > 0] = 1$. Pak $V = \frac{X}{Y}$ je spojitá náhodná veličina s hustotou

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(vu, u) \cdot u\ \mathrm{d}u$$

Náhodná veličina $W = XY$ je také spojitá s hustotou

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(\frac{w}{y}, y) \cdot \frac{1}{y}\ \mathrm{d}y$$

Důkaz. Spočteme $P[V \leq v] = P[\frac{X}{Y} \leq v] = P[X \leq vY] = P[(X, Y) \in H]$, kde H je polorovina rozdělená přímkou $x = vy$.
Postupujeme podobně jako u konvoluce a dostaneme

$$\int\int_H f_{(X,Y)}(u, t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{vu} f_{(X,Y)}(u, t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}u = F_v(v)$$

Opět zderivujeme - a pozor, ve horní mezi je vu, a tedy musíme i toto podle v zderivovat.
Hustotu součinu dostaneme dosazením $\dfrac{1}{Y}$ do podílu. ⊞

Věta 42 (Momentová vytvořující funkce součinu)**.** Buďte $X_1, \dots, X_n$ nezávislé náhodné veličiny a Y jejich součet. Pak $\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(t)$.

Důkaz. Z definice $\psi_Y(t) = Ee^{tY} = Ee^{t\sum X_i} = E\prod e^{tX_i}$. Poté z nezávislosti máme $\prod \psi_{X_i}(t)$. ⊞

Definice 37 (Podmíněné rozdělení diskrétního náhodného vektoru)**.** Buď (X, Y) náhodný vektor (s hodnotami v $\mathbb{R}^2$).
Definujeme podmíněné rozdělení X za podmínky $Y = n$, pokud $P[Y = n] > 0 : P[X = k|Y = n] = \dfrac{P[X = k, Y = n]}{P[Y = n]}$.

Definice 38 (Podmíněná střední hodnota diskrétního náhodného vektoru)**.** $E[X|Y = n] = \sum_k k \cdot P[X = k|Y = n]$, má-li pravá strana smysl.
Obecně pro funkci $g(x, y) : E|g(X, n)| < \infty$ platí $E(g(X, Y)|Y = n) = \sum_k g(k, n) \cdot P[X = k|Y = n]$.

Věta 43 (O úplné střední hodnotě)**.** Buď (X, Y) diskrétní náhodný vektor s EX existující konečnou. Pak $EX = \sum_n E[X|Y = n]P[Y = n]$ pokud $P[Y = n] > 0$.

Důkaz. $\sum\limits_n P[X|Y=n] \cdot P[Y=n] = \sum\limits_n \sum\limits_k k \cdot P[X=k|Y=n] \cdot P[Y=n] = \sum\limits_n \sum\limits_k \cdot \frac{P[X=k,Y=n]}{P[Y=n]} \cdot P[Y=n] = \sum\limits_n \sum\limits_k k \cdot P[X=k,Y=n] = \sum\limits_k k \cdot \sum\limits_n P[X=k,Y=n] = \sum\limits_k k \cdot P[X=k] = EX$ ⊞

Definice 39 (Podmíněná střední hodnota jako náhodná veličina)**.** Buď (X,Y) diskrétní náhodný vektor, $E|X| < \infty$. $E(X|Y)$ je náhodná veličina definovaná $E(X|Y)(\omega) = E(X|Y(\omega))$ neboli $\forall \omega \in \{\omega : Y(\omega) = n\}$: $E(X|Y)(\omega) = E(X|Y=n)$.

Věta 44 (Střední hodnota podmíněné střední hodnoty)**.** Buď (X,Y) diskrétní, $E|X| < \infty$. Pak $E(E(X|Y)) = EX$.

Důkaz. $E(E(X|Y)) = \sum\limits_n E(X|Y=n) \cdot P[Y=n] = EX$ ⊞

Definice 40 (Podmíněná hustota)**.** Buď (X,Y) absolutně spojitý náhodný vektor se sdruženou hustotou $f_{X,Y}$. Definujme $f_{X|Y}(v|w)$ předpisem $f_{X|Y}(v|w) = \frac{f_{X,Y}(v,w)}{f_Y(w)}$ pro $f_Y(w) > 0$, 0 jinak. Tuto funkci nazveme hustotou podmíněného rozdělení Y za podmínky $Z = w$.

Definice 41 (Podmíněná střední hodnota (spojitá verze))**.** Buď (X,Y) absolutně spojitý náhodný vektor, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taková, že $E|g(Y,w)| < \infty$. Pak definujeme $E(g(X,Y)|Y=w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v,w) f_{X|Y}(v|w)\, \mathrm{d}v$ a $E(X|Y=v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v f_{X|Y}(v|w)\, \mathrm{d}v$

Seznam témat